

Übungen zur Vorlesung QM III

Konfidenzintervalle

Aufgabe 11.1

New York Times, Monday, May 17, 2010: „Mistrust of the intentions of social sites appears to be pervasive. In its telephone survey of 1,000 people, the Berkeley Center of Law and Technology at the University of California found that 88 percent of the 18-to-24-year-olds it surveyed last July said there should be a law that requires Web sites to delete stored information. “

Berechnen Sie anhand der obigen Stichprobe ein 0,99-Konfidenzintervall für den Anteil der 18 bis 24-Jährigen in der Bevölkerung, die sich ein Gesetz wünschen, mit dem ein Webseiten-Betreiber wie facebook gezwungen werden kann, persönliche Daten eines Nutzers zu löschen.

Aufgabe 11.2

Bei den 2 217 Studierenden einer Fachhochschule soll auf Basis einer repräsentativen Zufallsstichprobe die im Mittel pro Woche aufgebrauchte Vorlesungs-Nachbereitungszeit eines Studierenden geschätzt werden. Aus vergangenen Untersuchungen weiß man, dass die Standardabweichung der wöchentlichen Nachbereitungszeit eines Studierenden in der Grundgesamtheit mit $\sigma = 3$ Stunden bekannt ist, genauso die Tatsache, dass die Nachbereitungszeit (gemessen in Stunden pro Woche) eines Studierenden normalverteilt ist. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 90 gezogen, die eine durchschnittliche wöchentliche Nachbereitungszeit von 22,6 Stunden pro Studierenden ergibt.

- Bestimmen Sie für die unbekannt im Mittel pro Woche aufgebrauchte Nachbereitungszeit μ aller Studierenden der Fachhochschule ein 0,95–Konfidenzintervall.
- Nehmen Sie zu Ihrem Ergebnis kurz, in Worten, Stellung: was bedeutet es inhaltlich?

Aufgabe 11.3

Eine Umfrage über die monatlichen Ausgaben (in Euro) für Auto und öffentliche Verkehrsmittel unter 100 Studierenden ergab folgende Daten:

51	55	60	63	64	64	64	64	69	69	69	70	70	70	70	70	71
71	72	72	73	73	73	74	74	74	74	74	75	75	76	76	76	77
77	77	77	77	78	78	78	78	78	78	78	79	79	80	80	80	80
80	81	81	82	82	82	82	82	84	85	86	86	86	87	87	87	87
88	88	88	88	89	89	89	90	90	90	90	90	90	91	91	91	91
92	92	93	94	94	95	95	95	97	97	98	98	101	102	103		

- Geben Sie ein approximatives 0,98-Konfidenzintervall und seinen Wert für den mittleren Ausgaben (in Euro) an.
- Geben Sie ein approximatives 0,94-Konfidenzintervall und seinen Wert für den Anteil der Studierenden in der Grundgesamtheit an, die monatlich mindestens 90 Euro für Auto und öffentliche Verkehrsmittel ausgeben.

Aufgabe 11.4

Schauen Sie sich im Internet das JAVA-Applet zur Breite von Konfidenzintervallen für μ an:

<http://www.rossmanchance.com/applets/ConfSim.html>

Wählen Sie folgende Einstellungen:

Method: Means
Normal

z with sigma $\mu = 0,5$
 $\sigma = 10,0$
 $n = 100$

Intervals: 50

Conf. level=95 %.

1. Wie viele grüne und wie viele rote Konfidenzintervalle erhalten Sie?
2. Erhöhen Sie den Stichprobenumfang n . Was passiert dann mit der Breite der Konfidenzintervalle?
3. Erhöhen Sie das Konfidenzniveau „Confidence level“ auf 99%. Was passiert dann mit der Breite der Konfidenzintervalle?
4. Verkleinern Sie den Wert von σ . Was passiert dann mit der Breite der Konfidenzintervall?

Lösung zu Aufgabe 11.1

p = Anteil der 18 bis 24-Jährigen in der Bevölkerung, die sich ein Gesetz wünschen, mit dem ein Web-Seiten-Betreiber gezwungen werden kann, persönliche Daten eines Nutzers zu löschen

$$\hat{p} = \frac{880}{1000} = 0,88$$

0,99-KI für p =

$$0,88 \pm 2,5758 \cdot \sqrt{\frac{0,88 \cdot 0,12}{1000}} = [0,854; 0,906] \approx [85\%; 91\%]$$

Da das berechnete Konfidenzintervall schmal ist, kann der Anteilswert von 88% in der Stichprobe als guter Schätzwert für den wahren Anteil in der Bevölkerung angesehen werden.

Lösung zu Aufgabe 11.2:

a) X = tatsächliche wöchentliche Nachbereitungszeit (in Stunden) eines Studierenden

$$X \sim \mathbf{N}(\mu; \sigma = 3)$$

$n = 90$ Befragte mit $\bar{x} = 22,6$

Gesucht: Auskunft über die im Mittel pro Woche aufgebrauchte Nachbereitungszeit μ (in Stunden) eines der 2217 Studierenden

0,95-KI für μ :

$$[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}] =$$

$$[22,6 - 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{90}}; 22,6 + 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{90}}] =$$

$$[22,6 - 0,6198; 22,6 + 0,6198] = [21,98; 23,22]$$

b) Das Intervall $[22; 23]$ ist ein geschätzter Bereich für das Intervall, in dem die im Mittel von einem Studierenden aufgebrauchte wöchentliche Nachbereitungszeit μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.

Lösung zu Aufgabe 11.3:

a) X = Ausgaben eines Studierenden (in Euro)

$X \approx \mathbf{N}(\mu; \sigma)$ Zentraler Grenzwertsatz, da Faustregel $n \geq 30$ erfüllt ist

$$\bar{x} = 81$$

$$s_x^2 = \frac{1}{100} [(51 - 81)^2 + (55 - 81)^2 + \dots + (103 - 81)^2] = 108,86$$

$$\text{Oder } s_x^2 = \frac{666,986}{100} - 81^2 = 108,86$$

$$s_x = \sqrt{108,86} \approx 10,4336$$

Gesucht: Aussage über den Wert von μ

approximatives 0,98-KI für μ :

$$[\bar{x} - 2,3263 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 2,3263 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}] =$$

$$[81 - 2,3263 \cdot \frac{10,4336}{\sqrt{100}}; 81 + 2,3263 \cdot \frac{10,4336}{\sqrt{100}}] =$$

$$[81 - 2,427029; 81 + 2,427029] = [78,57; 83,43]$$

Das Intervall [79; 83] ist ein geschätzter Bereich für das Intervall, in dem die mittleren Ausgaben μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 liegen.

- b) Intensiv-Konsument = Jemand, der mindestens 90 Euro pro Monat für Auto und öffentliche Verkehrsmittel ausgibt

$$X_i = \begin{cases} 0; i\text{-tes Kind ist kein Vielseher} \\ 1; i\text{-tes Kind ist ein Vielseher} \end{cases}$$

Gesucht: $P(X_i = 1) = p = ?$

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ = Anzahl der Intensiv-Konsumenten

$Y \sim \mathbf{B}(n = 100; p)$

$$\hat{p} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Die Faustregel $n \geq 100$ ist erfüllt.

approximatives 0,94-Konfidenzintervall für p :

$$[\hat{p} - 1,8808 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 1,8808 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}] =$$

$$[0,25 - 1,8808 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}}; 0,25 + 1,8808 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}}] =$$

$$[0,25 - 0,0814; 0,25 + 0,0814] = [0,1686; 0,3314]$$

d.h. die anhand der obigen Stichprobe berechnete Schätzung für den Bereich, in dem der wahre unbekannte Anteil p mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,94 liegt, ist das Intervall [17%; 33%]