Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
Sprechstunde di 9:00 - 10:00
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III Ss 2018

t-Test

Aufgabe 15.1

Ist die Ausbildungszeit zweier Ehepartner im Mittel gleich lang?

a) Prüfen Sie mit einem Test zum Niveau 0,05 anhand der nachfolgenden Stichprobe, ob sich die Ausbildungszeiten von Ehepartnern signifikant unterscheiden. Um diese Frage zu beantworten, wurden 31 Ehepaare befragt. Es ergaben sich folgende Werte:

Nr.	Anzahl		Nr.	Anzahl	
	Ehefrau	Ehemann		Ehefrau	Ehemann
1	14	13	16	11	10
2	18	16	17	14	11
3	16	16	18	17	20
4	16	15	19	19	20
5	10	9	20	22	20
6	20	17	21	12	11
7	13	12	22	15	11
8	17	16	23	21	19
9	13	12	24	10	10
10	12	16	25	19	20
11	17	17	26	9	10
12	14	12	27	9	11
13	14	15	28	14	13
14	16	17	29	20	18
15	18	13	30	19	15
			31	17	16

b) Falls Sie unter Teilaufgabe a) einen signifikanten Unterschied aufgedeckt haben, so prüfen Sie mit einem einseitigen Test, ob die Ehepartnerin oder der Ehepartner eine signifikant längere Ausbildungszeit haben.

c) Um wie viele Jahre ist die Ausbildungszeit signifikant länger?

Lösung zu Aufgabe 15.1
X=Differenz=Ausbildungsdauer von Ehefrau minus Ausbildungsdauer von Ehemann
$E[X] = \mu$

Nr.	Differenz	Differenz^2
1	1	1
2	2	4
3	0	0
4	1	1
5	1	1
6	3	9
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	-4	16
11	0	0
12	2	4
13	-1	1
14	-1	1
15	5	25
16	1	1
17	3	9
18	-3	9
19	-1	1
20	2	4
21	1	1
22	4	16
23	2	4
24	0	0
25	-1	1
26	-1	1
27	-2	4
28	1	1
29	2	4
30	4	16
31	1	1
$\sum$	25	139

$\overline{x} = \dfrac{25}{31} = 0{,}8064516$

$s_x^2 = \dfrac{139}{31} - \left(\dfrac{25}{31}\right)^2 = 3{,}833507$ und $s_x = \sqrt{3{,}833507} = 1{,}957934$
Faustregel $n = 31 \geq 30$ für t-Test ist erfüllt.

a) zweiseitiger t-Test:
H_0: Es gibt beim Vergleich der mittleren Ausbildungszeiten zweier Ehepartner

keinen Unterschied; d.h. $E[X] = 0$
H_1: Die mittleren Ausbildungszeiten zweier Ehepartner sind unterschiedlich; d.h. $E[X] \neq 0$
p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U \left(- \left| \frac{0{,}8064516 - 0}{\frac{1{,}957934}{\sqrt{31}}} \right| \right) = 2 \cdot F_U(-2{,}293301) \approx 2 \cdot 0{,}011 = 0{,}022 \leq 0{,}05 = \alpha$
d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. die mittleren Ausbildungszeiten zweier Ehepartner sind signifikant unterschiedlich.

b) einseitiger t-Test:

arithmetische Mittel Ausbildungszeiten

Ehefrau	Ehemann
$\frac{476}{31} = 15{,}35484$ Jahre	$\frac{451}{31} = 14{,}54839$ Jahre

Da in der Stichprobe die Ausbildungszeiten der Ehefrauen länger sind als die Ausbildungszeiten ihrer Ehemänner, lautet das Testproblem:
H_0: Nicht H_1; d.h. $E[X] \leq 0$
H_1: Ehefrauen gehen in Mittel länger zur Schule als ihre Ehemänner; d.h. $E[X] > 0$
p-Wert einseitiger t-Test $\approx 0{,}5 \cdot 0{,}022 = 0{,}011 \leq 0{,}05 = \alpha$
d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. Ehefrauen haben eine signifikant längere Ausbildungszeit als ihre Ehemänner.

c) Für $\mu_0 = 0{,}2; \mu_0 = 0{,}3; \mu_0 = 0{,}4; \ldots; \mu_0 = 1{,}4$ wird anhand dieser Stichprobe die Nullhypothese H_0 des zweiseitigen t-Tests nicht abgelehnt.

1. Unterschied= 1,4 Jahre
   Zweiseitiger t-Test: $H_0 : E[X] = 1{,}4$ gegen $H_1 : E[X] \neq 1{,}4$
   p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U \left(- \left| \frac{0{,}8064516 - 1{,}4}{\frac{1{,}957934}{\sqrt{31}}} \right| \right) = 2 \cdot F_U(-1{,}687869) \approx 2 \cdot 0{,}046 = 0{,}092 \geq 0{,}05 = \alpha$
   d.h. H_0 wird nicht abgelehnt; d.h. der Unterschied der mittleren Ausbildungszeit, die Ehefrauen länger als ihre Ehemännern verbringen, beträgt 1,4 Jahre.
2. Unterschied= 1,5 Jahre
   Zweiseitiger t-Test: $H_0 : E[X] = 1{,}5$ gegen $H_1 : E[X] \neq 1{,}5$
   p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U \left(- \left| \frac{0{,}8064516 - 1{,}5}{\frac{1{,}957934}{\sqrt{31}}} \right| \right) = 2 \cdot F_U(-1{,}972239) \approx 2 \cdot 0{,}024 = 0{,}048 \leq 0{,}05 = \alpha$
   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. der Unterschied der mittleren Ausbildungszeit, die Ehefrauen länger als ihre Ehemännern verbringen, weicht signifikant von 1,5 Jahren ab.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

t-Test Arbeitsblatt

Aufgabe

Testen Sie zum Signifikanzniveau 0,05, ob im Mittel die Nachbereitungszeiten (gemessen in Stunden pro Woche) für die Mathematik-Vorlesungen und für die Statistik-Vorlesungen gleich groß sind. Ein Umfrage unter 34 Studierenden ergab folgende Daten:

Nr.	Nachbereitungszeit (in h)		Nr.	Nachbereitungszeit (in h)	
	Mathematik	Statistik		Mathematik	Statistik
1	2,2	4,7	18	5,0	5,7
2	6,9	6,4	19	4,1	7,7
3	2,7	5,7	20	1,1	5,4
4	7,5	6,1	21	5,5	5,3
5	7,1	2,5	22	2,6	6,1
6	4,5	6,5	23	3,9	5,0
7	5,3	3,8	24	6,6	4,1
8	6,6	5,7	25	7,0	5,4
9	4,7	3,0	26	7,1	5,3
10	3,8	6,4	27	0,7	3,9
11	5,9	5,7	28	6,7	6,4
12	2,6	6,9	29	3,0	4,2
13	4,5	3,7	30	1,7	6,2
14	2,6	3,3	31	5,2	4,2
15	1,8	3,1	32	5,6	7,3
16	5,7	0,9	33	5,4	5,4
17	6,6	1,9	34	4,6	3,6

Wie lautet die Testentscheidung aufgrund dieser Stichprobe vom Umfang 34?

Lösung:
X=Nachbereitungszeit Mathematik minus Nachbereitungszeit Statistik (in Stunden)
$H_0 : E[X] = 0$ gegen $H_1 : E[X] \neq 0$
Die Faustregel $n \geq 30$ ist erfüllt.
Zunächst bilden wir die Differenz x_i der Nachbereitungszeit in Mathematik minus der Nachbereitungszeit in Statistik:

i	x_i	x_i^2
1	−2,5	6,25
2	0,5	
3	−3,0	
4	1,4	
5	4,6	
6	−2,0	
7	1,5	
8	0,9	
9	1,7	
10	−2,6	
11	0,2	
12	−4,3	
13	0,8	
14	−0,7	
15	−1,3	
16	4,8	
17	4,7	
18	−0,7	
19	−3,6	
20	−4,3	
21	0,2	
22	−3,5	
23	−1,1	
24	2,5	
25	1,6	
26	1,8	
27	−3,2	
28	0,3	
29	−1,2	
30	−4,5	
31	1,0	
32	−1,7	
33	0,0	
34	1,0	
$\sum$	−10,7	216,21

$\overline{x} = \frac{-10{,}7}{34} = -0{,}3147059$

$s^2 = \frac{216{,}21}{34} - (-0{,}3147059)^2 = 6{,}260078$

$s = \sqrt{6{,}260078} = 2{,}502015$

p-Wert $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{-0{,}3147059 - 0}{\frac{2{,}502015}{\sqrt{34}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-0{,}7334) \approx 2 \cdot 0{,}232 = 0{,}464 > 0{,}05 = \alpha$
d.h. H_0 wird nicht abgelehnt; d.h. es gibt keine signifikanten Unterschiede in der mittleren Nachbereitungszeit für Statistik und Mathematik.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

t-Test Arbeitsblatt

Aufgabe

Testen Sie zum Signifikanzniveau 0,05, ob die wöchentliche Nachbereitungszeit in Statistik im Mittel 5 1/2 Stunden beträgt, anhand der folgenden Stichprobe:

Stud. Nr.	Nachbereitungs-zeit (in h) Statistik	Stud. Nr.	Nachbereitungs-zeit (in h) Statistik
1	4,7	16	5,7
2	6,4	17	7,7
3	5,7	18	5,4
4	6,1	19	5,3
5	2,5	20	6,1
6	6,5	21	5,0
7	3,8	22	4,1
8	5,7	23	5,4
9	3,0	24	5,3
10	6,4	25	3,9
11	5,7	26	6,4
12	6,9	27	4,2
13	3,7	28	6,2
14	3,3	29	0,9
15	3,1	30	1,9

Lösung
X=Nachbereitungszeit Statistik (in Stunden)
$H_0 : E[X] = 5{,}5$ gegen $H_1 : E[X] \neq 5{,}5$
Die Faustregel $n \geq 30$ ist erfüllt.
$\overline{x} = 4{,}9$
$s^2 = \dfrac{794{,}4}{30} - 4{,}9^2 = 2{,}47$
$s = 1{,}571623$
$p\text{-Wert} \approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\dfrac{4{,}9 - 5{,}5}{\frac{1{,}571623}{\sqrt{30}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-2{,}091046) \approx 2 \cdot 0{,}018 = 0{,}036 \leq 0{,}05 = \alpha$
d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. die mittlere Nachbereitungszeit für Statistik beträgt nicht 5,5 Stunden pro Woche.