Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Lageparameter

Aufgabe 5.1
Drei Studierende A, B, C zahlen folgende Miete pro Monat:

- A zahlt 10 € pro m^2 für sein 21 m^2 großes Zimmer
- B zahlt 10 € pro m^2 für sein 19 m^2 großes Zimmer
- C zahlt 11 € pro m^2 für ihr 25 m^2 großes Zimmer

a) Was zahlen die drei im Durchschnitt an Monats-Miete pro Person?

b) Wie hoch ist der durchschnittliche Quadratmeter-Preis an monatlicher Miete?

c) Was ist der häufigste qm-Preis?

d) Wie hoch ist die mediane Miete pro m^2?

e) Student A hat vor drei Jahren noch 9,00 € pro qm bezahlt. Um wie viel Prozent ist im Zeitraum der letzten drei Jahre sein qm-Preis durchschnittlich pro Jahr gestiegen?

Aufgabe 5.2
Von den Rentnerinnen bzw. Rentnern bekommen in den neuen und alten Bundesländern in Deutschland eine monatliche Rente:

... bis unter	Frauen		Männer	
	West	Ost	West	Ost
unter 300 Euro	33,9	4,6	13,1	1,5
300 bis unter 600	29,0	25,3	11,7	6,0
600 bis unter 900	25,2	52,8	16,2	30,1
900 bis unter 1 200	8,8	13,7	23,8	37,4
1 200 bis unter 1 500	2,6	3,3	21,8	17,9
1 500 Euro oder mehr	0,6	0,4	13,4	7,0

Stand: 2012
Quelle: Hamburger Abendblatt 12.06.2013

Vergleichen Sie das Rentenniveau von Rentnerinnen und Rentnern anhand einer statistischen Maßzahl. Welches Geschlecht bezieht die höhere Rente?
Bemerkung: In Deutschland lag im Jahr 2009 das Gehalt von Frauen im Durchschnitt 12% unter dem Gehalt eines Mannes bei gleicher Qualifikation. Diese Phänomen wird in der Literatur als Gender Pay Gap bezeichnet.

Aufgabe 5.3
Bei einer Umfrage unter 5 000 US-Amerikanern, wie viele Minuten sie für den Hinweg zu iher Arbeitsstelle benötigen, ergaben sich folgende Werte:

	Prozent
null bis 20 Minuten	20,3
über 20 bis 30 Minuten	60,9
über 30 bis 48 Minuten	18,8

Wie viele Minuten verbringt ein US-Bürger im Durchschnitt auf dem Weg zur Arbeit?

Aufgabe 5.4 (Klausur 19.04.2006)
Ein Hotel in den Schweizer Alpen rechnet in der nächsten Skisaison aufgrund von Erfahrungswerten mit den folgenden Gewinnen in Abhängigkeit der Schneemenge:

Schneemenge	Gewinn
Extrem viel Schnee	800 000 GE
Viel Schnee	500 000 GE
Normale Schneemenge	200 000 GE
Wenig Schnee	−200 000 GE
Kein Schnee	−300 000 GE

Die langfristigen Wettervorhersagen ergeben:

Schneemenge	Wahrscheinlichkeit
Extrem viel Schnee	0,15
Viel Schnee	0,25
Normale Schneemenge	0,40
Wenig Schnee	0,12
Kein Schnee	0,08

Zur Verlustabsicherung schließt das Hotel eine „Schneeversicherung“ ab. Dabei erhält das Hotel 200 000 GE, falls wenig oder kein Schnee fällt. Die „Schneeversicherung“ kostet 35 000 GE. Lohnt es sich für das Hotel, die „Schneeversicherung“ abzuschließen?

Aufgabe 5.5
Auf einem Volksfest wird eine Wohltätigkeitslotterie veranstaltet. Die Lose sind mit den Nummern 1000 bis 2000 (jeweils einschließlich) versehen. Die Hauptgewinne von 100 Euro fallen auf die Lose mit den <u>End</u>ziffern 000, 250, 500; für alle Lose mit den <u>End</u>ziffern 33, 44, 55 und 66 gibt es Gewinne von 20 Euro; Trostpreise in Höhe von 3 Euro gibt es für Lose mit den <u>End</u>ziffern 7, 8 und 9. Die Zufallsvariable X gibt den Losgewinn an.

a) Tabellieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

c) Wie hoch müsste der Veranstalter der Lotterie den Preis für ein Los ansetzen, damit er einen Gewinn erzielt?

Aufgabe 5.6

Im Norden eines Landes beträgt die Geburtenrate 1,2 Kinder pro Frau, während im Süden des Landes die Geburtenrate 1,5 Kinder pro Frau beträgt. Insgesamt wohnen in dem Land 25 Mio Frauen, von denen 20 Mio im Norden des Landes wohnen.
Wie hoch ist die Geburtenrate des Landes?

Aufgabe 5.7

Die Verbraucherpreise in Deutschland haben sich gegenüber dem Vorjahr prozentual wie folgt verändert (Quelle: Statistisches Bundesamt):

Jahr	Rate in %
2007	2,3%
2008	2,6%
2009	0,3%
2010	1,1%
2011	2,1%
2012	2,0%
2013	1,5%

Quelle: Statistisches Bundesamt

Um wie viel Prozent sind die Verbraucherpreise im Zeitraum von 2010 bis 2013 durchschnittlich pro Jahr gestiegen?

Aufgabe 5.8

Gemäß statistica war der Gesamtbetrag (in Euro) der Einkünfte der Einkommensteuerpflichtigen in Deutschland im Jahr 2011 wie folgt verteilt:

Klasse	Anteil
0-2 500	3,1%
2 500-5 000	2,1%
5 000 - 7 500	2,5%
7 500 - 10 000	3,4%
10 000 - 12 500	4,7%
12 500 - 15 000	4,7%
15 000 - 20 000	9,1%
20 000 - 25 000	9,2%
25 000 - 30 000	9,1%
30 000 - 37 500	11,9%
37 500 - 50 000	14,1%
50 000 - 75 000	14,3%
75 000 - 100 000	5,8%
100 000 - 125 000	2,5%
125 000 - 175 000	1,8%
175 000 - 250 000	0,9%
250 000 - 375 000	0,4%
375 000 - 500 000	0,1%
500 000 - 1 000 000	0,1%
über 1 Mio	0,1%

a) Das höchste Managergehalt in Deutschland im Jahr 2011 hatte Herr Martin Winterkorn (VW) mit 16,6 Mio. Euro. Nehmen Sie den Betrag 16,6 Mio. Euro als letzte Klassenobergrenze.

1. Berechnen Sie den durchschnittlichen Gesamtbetrag der Einkünfte eines Einkommensteuerpflichtigen.
2. Wie viel Prozent der Einkommensteuerpflichtigen haben höhere Gesamteinkünfte als der durchschnittliche Gesamtbetrag?

b) Berechnen Sie den medianen Gesamtbetrag.

c) Welche der beiden Maßzahlen - medianer Gesamtbetrag, durchschnittlicher Gesamtbetrag - halten Sie für geeigneter, das Einkommensniveau wider zu spiegeln?

Aufgabe 5.9

Eine Testfahrerin soll eine Teststrecke einmal befahren und dabei die Durchschnittsgeschwindigkeit 80 km/h erzielen.

Auf der ersten Hälfte der Strecke erreicht die Testfahrerin die Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h. Ist es jetzt noch möglich, nach Befahren der zweiten Hälfte auf die gewünschte Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h zu kommen? Falls ja, mit welcher Geschwindigkeit müsste die Testfahrerin dann die zweite Hälfte befahren?

Lösung zu Aufgabe 5.1:

a) $\overline{x} = \dfrac{1}{3}\,[10 \cdot 21 + 10 \cdot 19 + 11 \cdot 25] = \dfrac{625}{3} = 225$

d.h. pro Monat wurden durchschnittlich etwa 225 € für Miete ausgegeben.

b) $\dfrac{210 + 190 + 275}{21 + 19 + 25} = \dfrac{675}{65} = 10{,}3846$

d.h. der durchschnittliche Quadratmeterpreis beträgt 10,38 €.

c) $x_{\text{Modus}} = 10$ €/m^2

d.h der häufigste Quadratmeterpreis beträgt 10 €/m^2

d)

x_i	n_i	n_i/n	F_i
10	2	2/3	2/3
11	1	1/3	1

$x_{0,50} \approx 10$

d.h. die mediane Miete pro m^2 beträgt 10 €.

e)

Jahr	m^2-Preis
2010	9
2013	10

$\sqrt[3]{\dfrac{10}{9}} = 1{,}0357$

d.h. der qm-Preis ist in den letzten drei Jahren um durchschnittlich 3,57% pro Jahr gestiegen.

Lösung zu Aufgabe 5.2:

X = Rentenhöhe (in Euro) einer Frau

Y = Rentenhöhe (in Euro) eines Mannes

$x_{0,50}^{\text{West}} \approx 300 + 300 \cdot \dfrac{0{,}50 - 0{,}339}{0{,}290} \approx 467$

$4{,}6 + 25{,}3 = 29{,}9$

$x_{0,50}^{\text{Ost}} \approx 600 + 300 \cdot \dfrac{0{,}50 - 0{,}299}{0{,}528} \approx 714$

$13{,}1 + 11{,}7 + 16{,}2 = 41{,}0$

$y_{0,50}^{\text{West}} \approx 900 + 300 \cdot \dfrac{0{,}50 - 0{,}410}{0{,}238} \approx 1\,013$

$1{,}5 + 6{,}0 + 30{,}1 = 37{,}6$

$y_{0,50}^{\text{Ost}} \approx 900 + 300 \cdot \dfrac{0{,}50 - 0{,}376}{0{,}374} \approx 1\,000$

d.h. Rentnerinnen beziehen weniger Rente als Rentner, im Westen ist die Rente von Männern mehr als doppelt so hoch wie die Rente von Frauen. Rentner in Ost und West beziehen eine fast gleiche mediane Rente. Während Frauen in den neuen Bundesländern eine um etwa 50% höhere Rente beziehen als Frauen in den alten Bundesländern.

Lösung zu Aufgabe 5.3:
X = Weg in Minuten zur Arbeit
1. Lösungsweg:
$$\overline{x} \approx 10 \cdot 0{,}203 + 25 \cdot 0{,}609 + 39 \cdot 0{,}188 = 24{,}587 \approx 25$$
d.h. ein US-Bürger benötigt im Durchschnitt etwa 25 Minuten für seinen Weg zur Arbeit.
2. Lösungsweg:
Annahme: $n = 1\,000$
$$\overline{x} \approx \frac{1}{1\,000}\,[10 \cdot 203 + 25 \cdot 609 + 39 \cdot 188] = 24{,}587 \approx 25$$

Lösung zu Aufgabe 5.4:
X = Gewinn (in GE) ohne Schneeversicherung in der nächsten Ski-Saison
Y = Gewinn (in GE) mit Schneeversicherung in der nächsten Ski-Saison

x_i	800 000	500 000	200 000	−200 000	−300 000
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	0,40	0,12	0,08

$E[X] = 800\,000 \cdot 0{,}15 + 500\,000 \cdot 0{,}25 + 200\,000 \cdot 0{,}4 - 200\,000 \cdot 0{,}12 - 300\,000 \cdot 0{,}08 = 277\,000$

y_i	765 000	465 000	165 000	−35 000	−135 000
$P(Y = y_i)$	0,15	0,25	0,40	0,12	0,08

$E[Y] = 765\,000 \cdot 0{,}15 + 465\,000 \cdot 0{,}25 + 165\,000 \cdot 0{,}4 - 35\,000 \cdot 0{,}12 - 135\,000 \cdot 0{,}08 = 282\,000$

d.h. der erwartete Gewinn der nächsten Ski-Saison ist höher, wenn die Versicherung abgeschlossen wird.

Lösung zu Aufgabe 5.5:
X = Gewinn (in Euro) eines Loses

a)

x	100	20	3	0
$P(X = x)$	4/1001	40/1001	300/1001	657/1001

b) $E[X] = 2{,}0979$

c) Der Lospreis müsste höher als 2,10 Euro sein.

Lösung zu Aufgabe 5.6:
$$\text{Geburtenrate} = \frac{\text{Anzahl Kinder}}{\text{Anzahl Frauen}}$$

	Frauen	Kinder
Norden	20 Mio	$1{,}2 \cdot 20 = 24$ Mio
Süden	5 Mio	$1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$ Mio
Insgesamt	25 Mio	31,5 Mio

Geburtenrate $= \frac{31{,}5}{25} = 1{,}26$
d.h. im gesamten Land liegt die Geburtenrate bei 1,26 Kinder pro Frau.

Mit der Formel des harmonischen Mittels ergibt sich:

$$x_H = \frac{24 + 7{,}5}{\frac{1}{1{,}2} \cdot 24 + \frac{1}{1{,}5} \cdot 7{,}5} = 1{,}26$$

Lösung zu Aufgabe 5.7:
Für die drei prozentualen Veränderungen wird die durchschnittliche jährliche prozentuale Veränderung mit Hilfe des geometrischen Mittels der Faktoren berechnet:

$$\sqrt[2013-2010]{1{,}021 \cdot 1{,}020 \cdot 1{,}015} = \sqrt[3]{1{,}057041} = 1{,}018663$$

d.h. im Zeitraum 2010 bis 2013 beträgt die durchschnittliche jährliche Inflation etwa 1,9%.

Lösung zu Aufgabe 5.8

Klasse	x'_j	n_j/n	F
0 – 2 500	1 250	3,1%	3,1%
2 500 – 5 000	3 750	2,1%	5,2%
5 000 – 7 500	6 250	2,5%	7,7%
7 500 – 10 000	8 750	3,4%	11,1%
10 000 – 12 500	11 250	4,7%	15,8%
12 500 – 15 000	13 750	4,7%	20,5%
15 000 – 20 000	17 500	9,1%	29,6%
20 000 – 25 000	22 500	9,2%	38,8%
25 000 – 30 000	27 500	9,1%	47,9%
30 000 – 37 500	33 750	11,9%	59,8%
37 500 – 50 000	43 750	14,1%	73,9%
50 000 – 75 000	62 500	14,3%	88,2%
75 000 – 100 000	87 500	5,8%	94,0%
100 000 – 125 000	112 500	2,5%	96,5%
125 000 – 175 000	150 000	1,8%	98,3%
175 000 – 250 000	212 500	0,9%	99,2%
250 000 – 375 000	312 500	0,4%	99,6%
375 000 – 500 000	437 500	0,1%	99,7%
500 000 – 1 000 000	750 000	0,1%	99,8%
1 000 000 – 16 600 000	8 800 000	0,1%	99,9%

a)
1. $\overline{x} \approx 1\,250 \cdot 0{,}031 + 3\,750 \cdot 0{,}021 + \ldots + 8\,800\,000 \cdot 0{,}001 = 50\,771{,}25$
   d.h. die durchschnittlichen Einkünfte liegen bei 50 771,25 Euro pro Monat.
2. $F(50\,771{,}25) \approx 0{,}739 + \frac{0{,}143}{25\,000}(50\,771{,}25 - 50\,000) = 0{,}743$
   $1 - 0{,}743 = 0{,}257$ d.h. etwa 25,7% der Einkommensteuerpflichtigen haben Einkünfte, die über den durchschnittlichen Einkünften liegen.

b) $x_{0,50} \approx 30\,000 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}479}{0{,}119} \cdot 7\,500 = 31\,323{,}53 \approx 31\,300$
d.h. die medianen Einkünfte liegen bei 31 300 Euro.

c) Die medianen Einkünfte sind geeignter, da Ausreißer - wie z.B. die Einkünfte von Herrn Winterkorn - die durchschnittlichen Einkünfte stark beeinflussen.

Lösung zu Aufgabe 5.9

Durchschnittsgeschwindigkeit $= \frac{\text{Strecke in km}}{\text{Zeit in h}}$

1. Lösungsweg:

Wir nehmen an, dass die Strecke 80 km lang ist. Dann hat die Testfahrerin für die erste Hälfte der Strecke bereits die gesamte Zeit von einer Stunde verbraucht, um auf die Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h zu kommen. Sie müsste also die zweite Hälfte der Strecke in null Stunden befahren, also unendlich schnell fahren, was nicht möglich ist.

2. Lösungsweg:

Annahme: Strecke = 80 km
1/2 Strecke = 40 km, für die erste Hälfte wird also eine Stunde Fahrtdauer benötigt.
Gesucht ist x= Fahrtdauer (in h) für die 2. Hälfte der Strecke. Somit haben wir die Gleichung:

$$\frac{\text{Strecke in km}}{\text{Zeit in h}} = 80 = \frac{40+40}{1+x} = \frac{80}{1+x} \Leftrightarrow x = 0 \text{ Stunden}$$

3. Lösungweg:

Gesucht: x= Durchschnittsgeschwindigkeit für die 2. Hälfte der Strecke

$$\text{harmonisches Mittel} = 80 = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{40} + \frac{1}{x} = \frac{2}{80} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \infty \text{ km/h}$$