Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zu QM III (Wirtschaftsstatistik)

Binomialverteilung

Aufgabe 9.1

Eine Unternehmung möchte eine Investition tätigen, die mit Risiken behaftet ist. Sie lässt das Investitionsvorhaben von einem Gutachterbüro prüfen. Dieses stellt Folgendes fest:

- In jeder der ersten zehn Perioden liegt das Risiko für einen Verlust bei 29%.
- Die Verluste der einzelnen Perioden sind in den ersten zehn Perioden stochastisch unabhängig.

Wie wahrscheinlich ist es, dass es in

a) der ersten Periode zu einem Verlust kommt?

b) der ersten Periode ein Verlust, in der zweiten Periode kein Verlust und in der dritten Periode wieder ein Verlust erwirtschaftet werden?

c) genau drei der ersten zehn Perioden zu einem Verlust kommt?

d) höchstens drei der ersten zehn Perioden zu einem Verlust kommt?

Aufgabe 9.2

1. Eine Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit den Parametern n und p. Der Erwartungswert von X beträgt 18, die Varianz 7,2. Berechnen Sie aus den gegebenen Informationen n und p.

2. Eine Maschine produziert zu 22% Ausschuss.

   a) Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden $n = 10$ der auf dieser Maschine hergestellten Stücke kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
      - höchstens drei Produkte Ausschuss sind?
      - mehr als fünf Produkte Ausschuss sind?
      - genau fünf Produkte Ausschuss sind?

   b) Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl der Ausschussstücke bei Qualitätskontrollen von Umfang 50 auf dieser Maschine.

Aufgabe 9.3

Ein Unternehmen mit einer Produktion von 237 Stück pro Periode überprüft jedes Produktionsstück vor dem Verkauf auf Qualität. Ein Produktionsstück, das defekt ist, wird als Ausschuss bezeichnet. Ein Stück Ausschuss wird zwar abgesetzt, verursacht aber zuvor Überarbeitungskosten von 1 GE. Das Unternehmen geht erfahrungsgemäß von einer Ausschussrate von 12% aus. Die tatsächliche Anzahl der defekten Produktionsstücke einer Periode und somit die tatsächlichen Überarbeitungskosten einer Periode werden als eine binomialverteilte Zufallsvariable angenommen. Bestimmen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ für die tatsächlichen Überarbeitungskosten einer Periode.

Aufgabe 9.4
Eine Großhändlerin kauft aus einer Lieferung von 500 Kisten Tomaten, von denen 23 Kisten überreife Ware enthält, zwanzig Kisten. Die überreifen Früchte sind nur noch für Tomatensuppe geeignet.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Großhändlerin keine Kiste mit überreifen Früchten erwirbt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Großhändlerin mindestens eine Kiste mit überreifen Früchten erwirbt?

c) Mit welcher Anzahl Kisten mit überreifen Früchten muss die Großhändlerin im Mittel rechnen?

Aufgabe 9.5
Schauen Sie sich im Internet das Applet „Binomial Distribution“ von Matt Bognar, Department of Statistics and Actuarial Science University of Iowa, an. Sie gelangen zu dem Applet wie folgt:

http://homepage.divms.uiowa.edu/∼ mbognar/applets/bin.html

a) Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}5)$ für zunehmendes p?
Hinweis: Geben Sie für n den Wert 10 ein und für p $= 0.5$. *Denken Sie an den Dezimalpunkt!*

b) Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}5)$ für abnehmendes p?
Hinweis: Geben Sie für n den Wert 10 ein und für p $= 0.5$. *Denken Sie an den Dezimalpunkt!*

Lösung zu Aufgabe 9.1:

$$X_i = \begin{cases} 0 & ; \text{ falls in der } i-\text{ten Periode kein Verlust gemacht wird} \\ 1 & ; \text{ falls in der } i-\text{ten Periode Verlust gemacht wird} \end{cases} \quad ; i = 1, \ldots, 10$$

$P(X_i = 1) = 0{,}29$

$X_1, \ldots, X_{10}$ stochastisch unabhängig.

a) $P(X_1 = 1) = 0{,}29$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,29.

b) $$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 1) &= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) \\ &= 0{,}29 \cdot 0{,}71 \cdot 0{,}29 \\ &= 0{,}0597 \end{aligned}$$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0597.

c) Y = Anzahl der Perioden, in denen ein Verlust gemacht wird.
   $Y \sim \mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}29)$
   $P(Y = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}29^3 \cdot 0{,}71^7 = 0{,}2662$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,2662.

d) $$\begin{aligned} P(Y \leq 3) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0{,}29^0 \cdot 0{,}71^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}29^1 \cdot 0{,}71^9 \\ &\quad + \binom{10}{2} \cdot 0{,}29^2 \cdot 0{,}71^8 + 0{,}2662 \\ &= 0{,}0326 + 0{,}1330 + 0{,}2444 + 0{,}2662 \\ &= 0{,}6761 \end{aligned}$$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,6761.

Lösung zu Aufgabe 9.2:

1. $18 = E[X] = n \cdot p$ und $7{,}2 = Var[X] = np(1-p) = 18(1-p) \Rightarrow p = 0{,}6 \Rightarrow n = 30$

2. X = Anzahl der Ausschussstücke unter den n kontrollierten Stücken

   a) $X \sim \mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}22)$
      $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	.0834	.2351	.2984	.2245	.1108	.0375	.0088	.0014	.0002	≈ 0	≈ 0

   - $P(X \leq 3) = 0{,}8413$
   - $P(X > 5) = P(X \geq 6) = 0{,}0104$
   - $P(X = 5) = 0{,}0375$

   b) $X \sim \mathsf{B}(n = 50; p = 0{,}22)$
      $E[X] = np = 50 \cdot 0{,}22 = 11$

Lösung zu Aufgabe 9.3

X = tatsächliche Anzahl der defekten Stücke in der nächsten Periode

$X \sim \mathsf{B}(n = 237; p = 0{,}12)$

$E[X] = np = 237 \cdot 0{,}12 = 28{,}44$

d.h. die erwarteten Überarbeitungskosten in der nächsten Periode betragen 28,44 GE
$Var[X] = np(1-p) = 28{,}44 \cdot 0{,}88 = 25{,}0272$
$\sqrt{Var[X]} = \sqrt{25{,}0272} = 5{,}0027$

Lösung zu Aufgabe 9.4:
$N = 500$ Kisten
$M = 23$ Kisten mit überreifen Früchten
$n = 20$ Kisten werden gekauft
Bei der Auswahl der 20 Kisten handelt es sich um ein Ziehen von 20 aus 500 ohne Zurücklegen.
Sei A das Ereignis, die Kiste überreife Früchte enthält. Dann beträgt vor der ersten Auswahl einer Adresse $P(A) = \frac{M}{N} = \frac{23}{500}$.
Falls die erste Kiste keine überreifen Früchte enthält, so beträgt vor der zweiten Auswahl einer Kiste $P(A) = \frac{23}{499}$, anderenfalls beträgt $P(A) = \frac{22}{499}$. D.h. $P(A)$ ist vor jeder Wiederholung des Zufallsexperiments nicht gleich groß. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ wäre vor jeder Wiederholung gleich groß, wenn die gezogene Kiste wieder zurückgelegt werden würde und somit erneut gezogen werden könnte; d.h. wir also 20 aus 500 ziehen würden mit Zurücklegen.
Also liegt keine exakte Binomialverteilung vor. Die Binomialverteilung kann aber dennoch zur näherungsweisen Berechnung herangezogen werden, falls der Auswahlsatz $\frac{n}{N}$ höchstens 0,05 beträgt.
$X=$ Anzahl der Kisten mit überreifen Früchten
$X \approx \mathsf{B}(n = 20; p = 0{,}046)$; da der Auswahlsatz $\frac{n}{N} = \frac{20}{500} = 0{,}04 \leq 0{,}05$ beträgt.

a) $P(X = 0) \approx \binom{20}{0} \cdot 0{,}046^0 \cdot 0{,}954^{20} = 0{,}3899$
d.h. die Wahrscheinlichkeit ist eher gering und beträgt 0,3899.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}3899 = 0{,}6101$
d.h. die Wahrscheinlichkeit ist mit dem Wert 0,6101 weder klein noch hoch. Die Großhändlerin muss also mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens eine Kiste mit überreifen Früchten zu erwerben.

c) $E[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}046 = 0{,}92$ d.h. die Großhändlerin muss damit rechnen, etwa knapp eine Kiste mit überreifen Früchten zu erwerben.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM III (Wirtschaftsstatistik)

Arbeitsblatt

Beispiel 1 (Klausur vom 11.07.2006)
Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden bei einem Unternehmen monatlich 30 Fertigungsstücke einer Prüfung unterzogen. Erfahrungsgemäß liegt die Ausschussrate bei 5 %. Die Qualität der einzelnen Fertigungsstücke sei stochastisch unabhängig voneinander.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Monat August höchstens zwei Fertigungsstücke als Ausschuss aussortiert werden? (*Lösung: 0,8122*)

Beispiel 2 (Klausur vom 15.07.2008)
Der deutsche Basketballprofi Dirk Nowitzki spielt für die Dallas Mavericks in der amerikanischen Profiliga NBA. In der Saison 2006/2007 wurde er als erster Europäer zum wertvollsten Spieler der NBA gewählt. Mitentscheidend für diese Wahl dürfte gewesen sein, dass er in der Saison 2006/2007 eine Trefferquote von 90,3 Prozent bei Freiwürfen erzielen konnte. Man kann davon ausgehen, dass der Erfolg bei einem Freiwurf stochastisch unabhängig davon ist, dass Dirk Nowitzki bereits den vorherigen Freiwurf erfolgreich absolvierte.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Dirk Nowitzki

   1. dreimal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist? (*Lösung: 0,736*)
   2. bei zehn Freiwurf-Versuchen genau sieben Treffer erzielt? (*Lösung: 0,054*)
   3. bei zehn Freiwurf-Versuchen mindestens sieben Treffer erzielt? (*Lösung: 0,989*)
   4. bei zehn Freiwurf-Versuchen mindestens dreimal daneben wirft? (*Lösung: 0,065*)

Beispiel 3 (Klausur vom 29.09.2003)
Ein Unternehmen produziert Fliesen in den Farben gelb und weiß. Da beide Farben bei den Kunden gleich beliebt sind, besteht 50% der Produktion aus gelben und 50% der Produktion aus weißen Fliesen.

Die Fliesen werden unsortiert verkauft, d.h. die Kunden können nur eine Anzahl von Fliesen bestellen, wissen aber nicht, wie viele gelbe bzw. weiße Fliesen sie bekommen.

a) Kunde A bestellt 10 Fliesen. Wie wahrscheinlich ist es, dass darunter weniger als 3 gelbe Fliesen sind? (*Lösung: 0,0547*)

Beispiel 4
In einer Pumpenstation fällt am Tag eine Pumpe mit der Wahrscheinlichkeit 0,10 aus. Zu der Station gehören zehn Pumpen. Zur Aufrechterhaltung des Betriebs müssen mindestens sieben Pumpen laufen. Die Pumpen fallen stochastisch unabhängig voneinander aus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle zehn Pumpen laufen? (*Lösung: 0,3487*)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau sieben Pumpen laufen? (*Lösung: 0,0574*)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrieb nicht aufrecht erhalten werden kann? (*Lösung: 0,0128*)

d) Wie groß ist an einem Tag die erwartete Anzahl der Pumpen, die nicht laufen werden? (*Lösung: Eine Pumpe)*

Beispiel 5
Aus einem Katalog mit 120 Fragen zu einem Prüfungsfach werden für eine Prüfung genau sechs Fragen zufällig ausgewählt. Um die Prüfung zu bestehen, müssen mindestens drei der sechs Fragen richtig beantwortet werden. Ein Studierender hat sich lediglich auf 72 der 120 Fragen vorbereitet, das aber sehr gut.

a) Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Studierende die Prüfung besteht? (*Lösung: 0,8208*)

b) Wie viele Fragen muss der Studierende vorbereiten, um mit Sicherheit die Prüfung zu bestehen? (*Lösung: ?*)

c) Wie hoch ist die erwartete Anzahl der richtig beantworteten Klausurfragen? (*Lösung: 3,6* Fragen)

d) Auf mindestens wie viele Fragen muss sich ein Kandidat gründlich vorbereiten, damit die erwartete Anzahl von richtigen Antworten mindestens drei beträgt? (*Lösung: 60 Fragen*)

Lösung zu Beispiel 4:
X=Anzahl der pro Tag ausgefallenen Pumpen
$X \sim \mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}1)$

a) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}3487$

b) $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 = 0{,}0574$

c)
$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] \\ &= 1 - [0{,}3487 + 0{,}3874 + 0{,}1937 + 0{,}0574] \\ &= 1 - 0{,}9872 \\ &= 0{,}0128 \end{aligned}$$

d) $E[X] = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}1 = 1$