3.4 Stetige Verz.

Hauptaufgabe: Endguthaben berechnen, auf das ein Kapital bei m-maliger unterjährigen Verz. zum relativen Zins anwächst, wenn die Zinsperioden beliebig klein werden, d.h. nicht jede Minute, nicht jeden Sekunde, sondern jeden Augenblick verzinst wird.

Die stetige Verz. wird auch als Verz. des Augenblicks bezeichnet. Wenn in einem Jahr zu jedem Augenblick verzinst wird, so wird die Anzahl m der Verz. pro Jahr beliebig groß, genauer: m strebt gegen unendlich:

$$K_1 = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1+\frac{i}{m}\right)^m = K_0 \cdot \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{i}{m}\right)^m = K_0 \cdot e^i$$

lies: Limes

Grenzwert (vgl. Wirtschaftsmathematik)

Nach n Jahren ($n \geq 0$) beträgt das Guthaben bei stetigen Verz.:

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} = K_0 \cdot e^{i\cdot n} \qquad \text{F. 1.8}$$

Beispiel:

Auf welches Guthaben wächst ein Startkapital von 8 000 € bei stetiger Verz. zu 0,7 % pro Jahr nach 11 Jahren, 5 Monaten, 23 Tagen an?

$n = 11 + \frac{5}{12} + \frac{23}{360} = 11{,}48056$ Jahre

$K_n = 8000 \cdot e^{0{,}007 \cdot 11{,}48056} = 8000 \cdot e^{0{,}08036392} = 8669{,}45$

Aus der Formel $K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}$ lassen sich wieder die Größen i bzw. n bzw. K_0 berechnen.

Beispiel:

Ein Startkapital von 5000 € ist bei stetigen Verz. zu 0,9 % auf 5343,80 € angewachsen. Wie lange hat es gelegen?

$5343{,}80 = 5000 \cdot e^{0{,}009 \cdot n} \qquad | : 5000$

$1{,}06876 = e^{0{,}009\cdot n} \qquad | \ln$

$\ln 1{,}06876 = \ln\left(e^{0{,}009\cdot n}\right) = 0{,}009 \cdot n \qquad | : 0{,}009$

$n = \frac{\ln 1{,}06876}{0{,}009} = 7{,}388789$ Jahre

$0{,}388789 \cdot 360 \approx 140$ Tage $= 4$ Monate, 20 Tage

d.h. n = 7 Jahre, 4 Monate, 20 Tage

Beispiel:

Ein Startkapital von 2000 € nach 5 Jahren, 7 Monaten, 8 Tagen bei stetigen Verz. auf 2127,20 € angewachsen. Jahreszins = ?

$n = 5$ Jahre, 7 Monate, 8 Tage $= 5 + \frac{7}{12} + \frac{8}{360} = 5{,}60\overline{5}$

$2127{,}20 = 2000 \cdot e^{5{,}60\overline{5}\cdot i} \qquad | : 2000$

$1{,}0636 = e^{5{,}60\overline{5}\cdot i} \qquad | \ln$

$\ln 1{,}0636 = \ln\left(e^{5{,}60\overline{5}\cdot i}\right) = 5{,}60\overline{5} \cdot i \qquad | : 5{,}60\overline{5}$

$i = \ln(1{,}0636) : 5{,}60\overline{5} = 0{,}011 = 1{,}1\,\%$ Jahreszins

Beispiel:

Ein Startkapital ist nach 2 Jahren, 9 Monaten, 21 Tagen bei stetiger Verz. zu 1,4% Jahreszins auf 4160,40 € angewachsen. Startkapital = ?

$n = 2 + \frac{9}{12} + \frac{21}{360} = 2,808\overline{3}$

$4160,40 = K_0 \cdot e^{2,808\overline{3} \cdot 0,014} = K_0 \cdot 1,0401 \qquad | : 1,0401$

$K_0 = \frac{4160,40}{1,0401} = 4000$ €