4.2 Unterjährige Renten

unterjährige Rente = gleich hohe Zahlung m-mal pro Jahr

monatlich unterjährige Rente, d.h. $m = 12$

Quartalsrenten ; d.h. $m = 4$

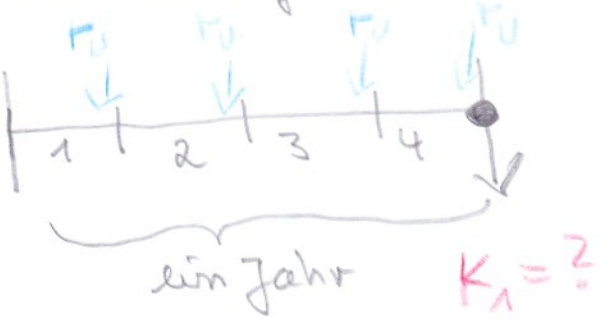
unterjährige nachschüssige Rente ; d.h. die Zahlungen erfolgen jeweils am Ende der betrachteten Zeitperioden $= r_U$

unterjährige vorschüssige Rente ; d.h. die Zahlungen erfolgen jeweils zu Beginn der betrachteten Zeitperioden $= r_U'$

4.2.1 Nachschüssige Rente zu relativ gemischter Verz.

Beispiel:

nachschüssige Quartalsrenten r_U



Die erste Zahlung r_U liegt bis zum Ende des Jahres 3 Quartale:

$r_U\left(1 + \frac{3}{4} \cdot i\right)$ F. 1.1

Die zweite Zahlung r_U liegt bis zum Ende des Jahres 2 Quartale:

$r_U\left(1 + \frac{2}{4} \cdot i\right)$

Die dritte Zahlung r_U liegt bis zum Ende des Jahres 1 Quartal:

$r_U\left(1 + \frac{1}{4} \cdot i\right)$

Die letzte Zahlung r_U ist am Ende des Jahres gerade fällig:

r_U

$$K_1 = r_U\left(1 + \frac{3}{4} \cdot i\right) + r_U\left(1 + \frac{2}{4} \cdot i\right) + r_U\left(1 + \frac{1}{4} \cdot i\right) + r_U$$

$$= 4r_U + r_U \cdot i \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = 4r_U + \frac{3}{2} \cdot r_U \cdot i = r_U\left(4 + \frac{3}{2} \cdot i\right)$$

Allgemein gilt für unterjährige nachschüssige Renten r_U:

$$K_1 = r_U \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right) \qquad \text{F. 2.2}$$

Beispiel:

4 % Jahreszins

100 € werden regelmäßig am Ende eines Monats eingezahlt

a) $K_1 = ?$

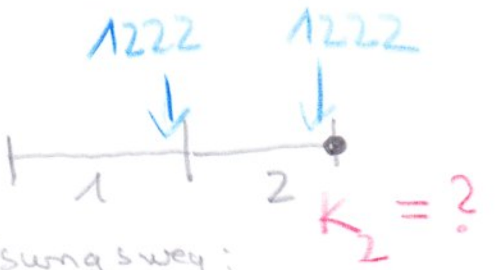
b) $K_2 = ?$

c) $K_{10} = ?$

zu a) $m = 12$

$$\underset{\text{F. 2.2}}{K_1} = 100\left(12 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}04\right) = 1222$$

zu b)



Am Ende eines jeden Jahres beträgt das Guthaben aus den in diesem Jahr getätigten Zahlungen 1222 €.

1. Lösungsweg:

$$K_2 = \underbrace{1222 \cdot 1{,}04}_{\text{F. 1.2}} + 1222 = 2492{,}88$$

2. Lösungsweg:

$K_1 = 1222$ wird auch als nachschüssige Jahresersatzrente r_J bezeichnet. Dann lässt sich K_2 auch mit der Rentenendwertformel F. 2.1 berechnen:

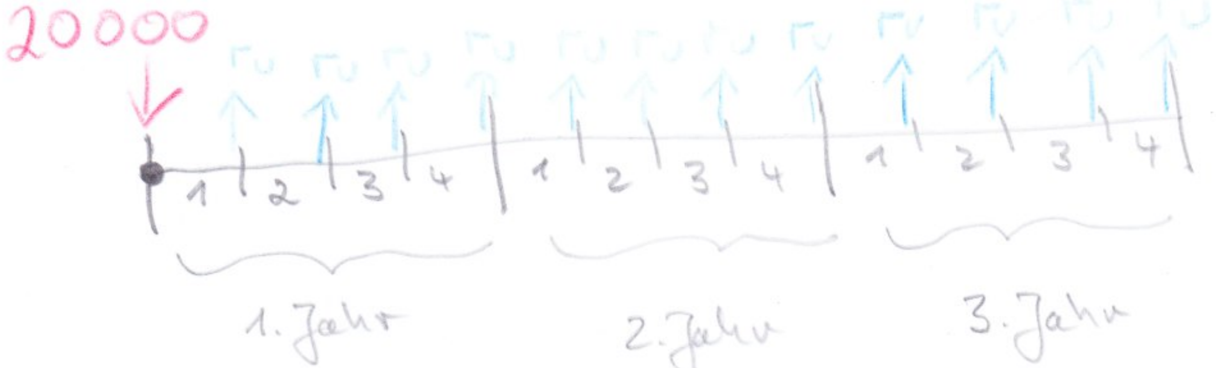
$$K_2 = R_2 = 1222 \cdot \frac{1{,}04^2 - 1}{0{,}04} = 2492{,}88$$

zu c) $$K_{10} = R_{10} = 1222 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 14\,671{,}46$$

F. 2.1

Beispiel:

Gegen Einzahlung von 20 000 € soll eine nachschüssige Quartalsrente über drei Jahre bei 12% Jahreszins ausgezahlt werden. Quartalsrente = ?



wir berechnen zunächst die nachsch. Jahresersatzrente r_j:

$$20\,000 = R_0 = r_j \cdot \frac{1{,}12^3-1}{0{,}012} \cdot \frac{1}{1{,}12^3} \qquad \text{F. 2.1}$$

$$20\,000 = r_j \cdot 2{,}401831 \iff r_j = 8\,326{,}98$$

jetzt können wir die Quartalsrente r_U berechnen:

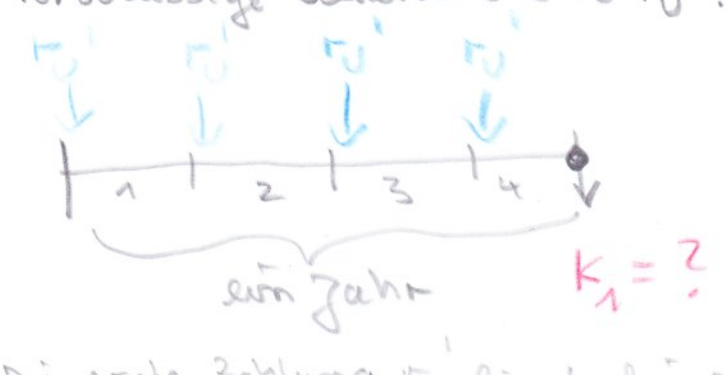
$$8\,326{,}98 = r_U \left(4 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}12\right) \qquad \text{F. 2.2}$$

$$8\,326{,}98 = r_U \cdot 4{,}18 \iff r_U = 1\,992{,}10$$

4.2.2. Vorschüssige Rente zu relativ gemischter Verz.

Beispiel:

vorschüssige Quartalsrente r_U':



Die erste Zahlung r_U' liegt bis zum Jahresende ein Jahr oder vier Quartale:

$$r_U' \cdot q = r_U' \cdot (1+i) = r_U' \cdot \left(1 + \frac{4}{4} \cdot i\right) \qquad \text{F. 1.2}$$

Die zweite Zahlung r_U' liegt bis zum Ende des Jahres 3 Quartale:

$r_U'\left(1+\frac{3}{4}\cdot i\right)$ F.1.1

Die dritte Zahlung r_U' liegt bis zum Ende des Jahres 2 Quartale:

$r_U'\left(1+\frac{2}{4}\cdot i\right)$

Die letzte Zahlung r_U' liegt bis zum Ende des Jahres ein Quartal:

$r_U'\left(1+\frac{1}{4}\cdot i\right)$

$$K_1 = r_U'\left(1+\frac{4}{4}\cdot i\right) + r_U'\left(1+\frac{3}{4}\cdot i\right) + r_U'\left(1+\frac{2}{4}\cdot i\right) + r_U'\left(1+\frac{1}{4}\cdot i\right)$$

$$= 4r_U' + r_U'\cdot i\cdot\left(\frac{4}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right) = 4r_U' + \frac{5}{2}\cdot r_U'\cdot i$$

$$= r_U'\left(4+\frac{5}{2}\cdot i\right)$$

Allgemein gilt für unterjährige vorschüssige Renten r_U':

$$K_1 = r_U'\left(m+\frac{m+1}{2}\cdot i\right) = r_J$$ F.2.2

Beispiel:

4% Jahreszins

100 € werden regelmäßig zu Beginn eines Monats eingezahlt

a) $K_1 = ?$

b) $K_2 = ?$

c) $K_{10} = ?$

zu a) $K_1 = 100\left(12+\frac{13}{2}\cdot 0{,}04\right) = 1226$

zu b) nachschüssige (!) Jahresersatzrente $r_J = 1226$

$$K_2 = 1226\cdot 1{,}04 + 1226 = 2501{,}04$$

oder

$$K_2 = R_2 = 1226\cdot\frac{1{,}04^2-1}{0{,}04} = 2501{,}04$$

⚠ Die Jahresersatzrente r_j ist immer eine nachschüssige Jahresrente, egal ob die unterjährige Rente eine vor- oder nachschüssige Rente ist, weil r_j jeweils das Guthaben K_1 <u>am Ende</u> eines Jahres angibt.

Beispiel:
Gegen Einzahlung von 85 000 € soll eine zukünftige Monatsrente über 1200 € ausgezahlt werden. Die erste Auszahlung ist sofort bei der Einzahlung von 85 000 € fällig. Wie viele volle Jahre lang kann die Monatsrente in Höhe von 1200 € ausgezahlt werden, wenn der Jahreszins 0,8% beträgt?

85000 1200 vorschüssige Monatsrente

nachsch. Jahresersatzrente r_j:

$$r_j = 1200 \cdot \left(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}008\right) = 14\,462{,}4 \quad \text{F. 2.2}$$

85000 = Barwert der nachsch. Ersatzrente r_j.

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{85\,000}{14\,462{,}4} \cdot 0{,}008\right]}{\ln 1{,}008} = 6{,}04 \text{ Jahre}$$

F. 2.1

d.h. sechs volle Jahr lang kann die volle Monatsrente ausgezahlt werden.

Zusatzfrage: Restguthaben am Ende des 6. Jahres?

$$85000 \cdot 1{,}008^6 = 89\,162{,}48 \text{ €}$$

$$R_6 = 14\,462{,}4 \cdot \frac{1{,}008^6 - 1}{0{,}008} = 88\,528{,}51 \text{ €}$$

$$89\,162{,}48 - 88\,528{,}51 = 633{,}96 \text{ € Restguthaben}$$