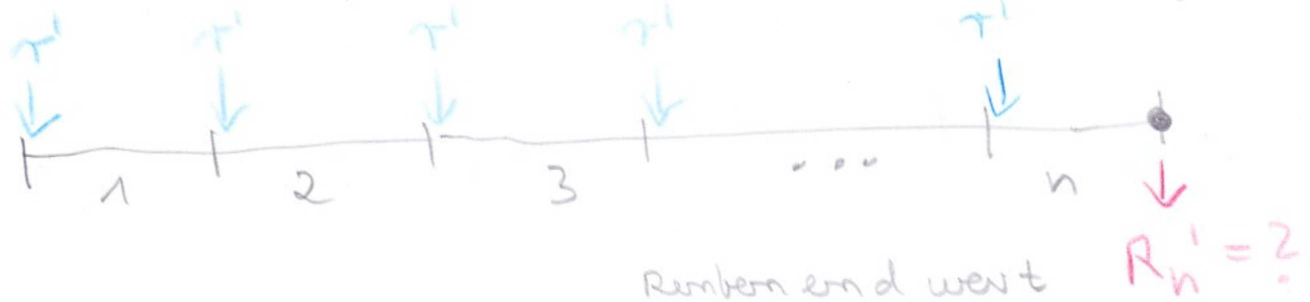
4.1.2 Vorschüssige Jahresrente

d.h. regelmäßige gleichhohe Zahlungen von r' GE jeweils zu Beginn eines Jahres

⚠ Vorschüssige Jahresrenten werden nachschüssig verzinst.



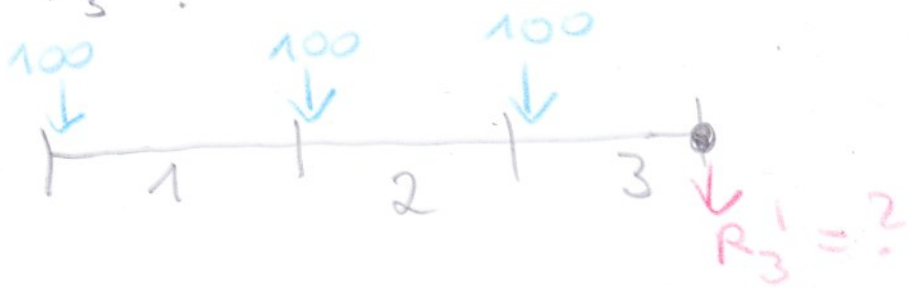
Rentenendwert einer vorschüssigen Jahresrente

Beispiel

3 % Jahreszins

a) Einzahlung von 100 € jeweils zu Beginn eines Jahres

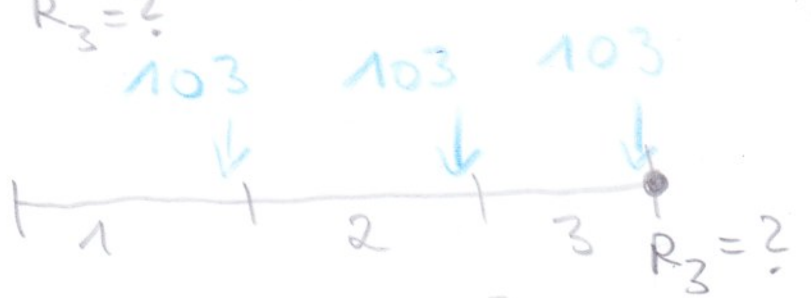
$R_3' = ?$



$$R_3' \underset{\text{F. 1. 2}}{=} 100 \cdot 1{,}03^3 + 100 \cdot 1{,}03^2 + 100 \cdot 1{,}03 = 318{,}36 \text{ €}$$

b) Einzahlung von 103 € jeweils am Ende eines Jahres

$R_3 = ?$



gleich groß, ist das Zufall?

$$R_3 \underset{\text{F. 2. 1}}{=} 103 \cdot \frac{1{,}03^3 - 1}{0{,}03} = 318{,}36 \text{ €}$$

Die Rentenendwerte unter a) und b) sind gleich groß, weil bei 3 % Jahreszins eine vorsch. Jahresrente von 100 €

genauso viel Guthaben bringt wie eine nachsch. Jahresrente von 103 €.

Fazit: $r = r' \cdot q$ Nr. F.2.1

$$\underbrace{103}_{\text{nachsch.}} = \underbrace{100}_{\text{vorsch.}} \cdot 1{,}03$$

Aus der Formel Nr. 9.1 ergeben sich für vorsch. Jahresrenten:

$$R_n' = \boxed{r' \cdot q} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad , \quad R_0' = \boxed{r' \cdot q} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{R_0'}{\boxed{r' \cdot q}}(q-1)\right]}{\ln q} \quad , \quad n = \frac{\ln\left[1 + \frac{R_n'}{\boxed{r' \cdot q}}(q-1)\right]}{\ln q}$$

Diese vier Formeln stehen <u>nicht</u> in der Formelsammlung, sondern lediglich Formel F.2.1 mit $\boxed{r} = \boxed{r' \cdot q}$. Das bedeutet, dass für vorsch. Jahresrenten r' die Variable r aus den Formeln R_n, R_0, n ersetzt werden muss durch $r' \cdot q$.

Beispiel (Fortsetzung):

a) $R_3' = 100 \cdot 1{,}03 \cdot \dfrac{1{,}03^3 - 1}{0{,}03} = 318{,}36$ €

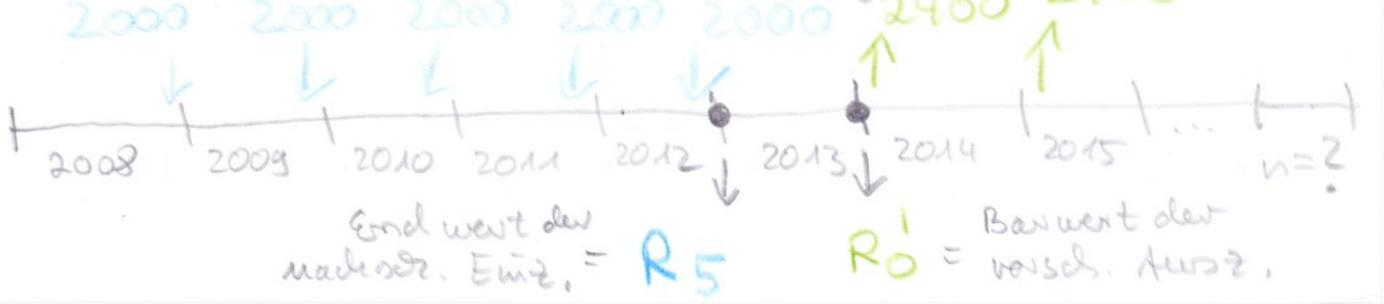
Beispiel:

3,7 % Jahreszins

2000 € = nachsch. Einzahlungen in den Jahren 2008, 9, 10, 11, 12

2400 € vorschüssige Auszahlungen jeweils zu Beginn eines Jahres ab dem 01.01.2014

a) Wie oft sind volle Auszahlungen möglich?



$$R_5 = 2000 \cdot \frac{1{,}037^5 - 1}{0{,}037} = 10\,767{,}89$$

$$R_0' = 10\,767{,}89 \cdot 1{,}037 = 11\,166{,}30$$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{11\,166{,}30}{2400 \cdot 1{,}037} \cdot 0{,}037\right]}{\ln 1{,}037} = 4{,}996$$

d.h. es sind vier volle Auszahlungen in Höhe von jeweils 2400 € zu Beginn der Jahre 2014, 2015, 2016, 2017 möglich.

b) Wie hoch ist das Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung?

Restguthaben am 31.12.17 = ?

$11\,166{,}30 \cdot 1{,}037^4 = 12\,912{,}92$ Guthaben am 31.12.17, wenn es keine Auszahlungen geben würde

Rentenendwert am 31.12.17 der Auszahlungen:

$$R_4' = 2400 \cdot 1{,}037 \cdot \frac{1{,}037^4 - 1}{0{,}037} = 10\,521{,}47$$

$12\,912{,}92 - 10\,521{,}47 = 2391{,}45$ Kontostand am 31.12.17

Beispiel:

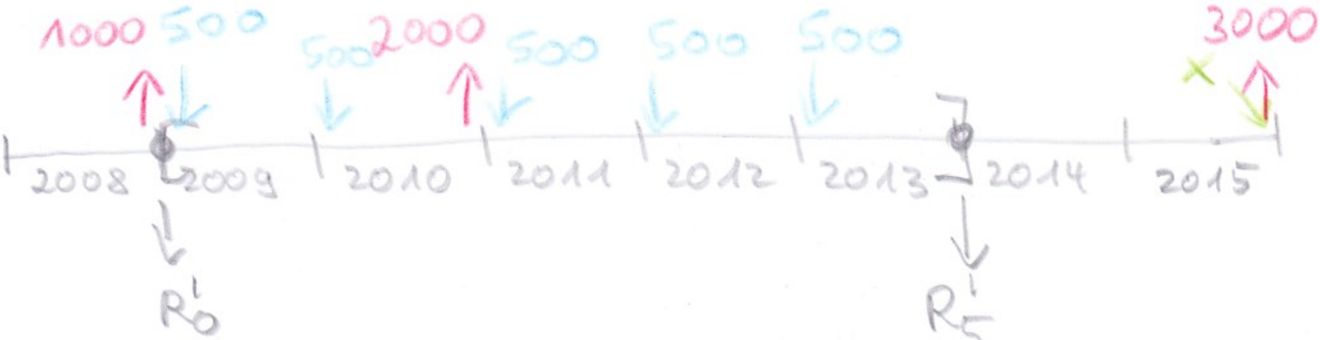
4,2% Jahreszins

Zahlungsverpflichtungen:

- 1000 € am 31.12.2008
- 2000 € am 31.12.2010
- 3000 € am 31.12.2015

Umschuldung, Rückzahlung erfolgt stattdessen durch:

- eine 5-jährige Jahresrente 500 €, erste Z. am 01.01.2009
- und eine $\underbrace{\text{Restzahlung}}_{X=?}$ am 31.12.2015



Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.12.2015:

$$1000 \cdot 1{,}048^7 + 2000 \cdot 1{,}048^5 + 3000 = 6\,916{,}79$$

Rentenendwert am 31.12.2013:

$$R_5' = 500 \cdot 1{,}048 \cdot \frac{1{,}048^5 - 1}{0{,}048} = 2\,883{,}89$$

Wert der Rente zwei Jahre später am 31.12.2015:

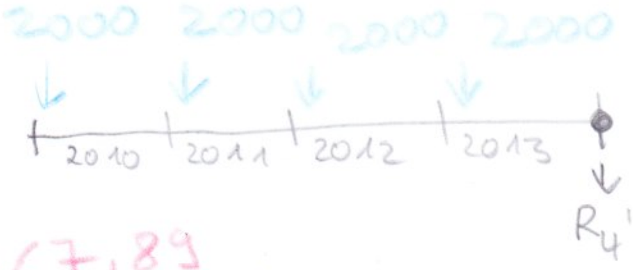
$$2883{,}89 \cdot 1{,}048^2 = 3167{,}39$$

$$x = 6916{,}79 - 3167{,}39 = 3749{,}40 \text{ €}$$

Beispiel:

3,7 % Jahreszins

Eine 4-jährige vorschl. Jahresrente von 2000 € in den Jahren 2010, 2011, 2012, 2013 soll umgewandelt werden in eine 8-jährige nachschl. $\underbrace{\text{Jahresrente}}_{=\,?}$, erste Rente fällig am 31.12.2014



$$R_4' = 2000 \cdot 1{,}037 \cdot \frac{1{,}037^4 - 1}{0{,}037} = 8\,767{,}89$$

$$8767{,}89 = R_0 = r \cdot \frac{1{,}037^8 - 1}{0{,}037} \cdot \frac{1}{1{,}037^8} = r \cdot 6{,}816938$$

$$r = 1\,286{,}19$$