

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III
Mindeststichprobenumfang
Arbeitsblatt

Aufgabe 1 (Klausur vom 28.09.2005)

In regelmäßigen Abständen beauftragt ein Unternehmen eine Marktforschungsinstitut, für den Marktanteil seines wichtigsten Produkts ein 0,95%-Konfidenzintervall zu berechnen.

Bei einer Umfrage von 8 500 Personen gaben 2 193 Personen an, das Produkt regelmäßig zu kaufen. Bestimmen Sie aufgrund dieser Stichprobe ein 0,95%-Konfidenzintervall für den Anteil der Personen, die dieses Produkt regelmäßig kaufen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (Klausur vom 12.07.2005)

In regelmäßigen Abständen beauftragt ein Unternehmen ein Marktforschungsinstitut, den Marktanteil seines wichtigsten Produkts zu untersuchen. In der Vergangenheit lag der beobachtete Marktanteil bei ca. 3,7 %. Das Marktforschungsinstitut rechnet mit dem Unternehmen folgendes Honorar ab:

$$\begin{aligned} \text{Honorar} &= \text{Fixhonorar} + \text{Kostensatz mal Anzahl der befragten Personen} \\ &= 25\,000 \text{ GE} + 10 \text{ GE} \cdot \text{Anzahl der befragten Personen} \end{aligned}$$

Das Unternehmen bittet das Marktforschungsinstitut, die nächste Befragung so zu gestalten, dass sich aus den Ergebnissen ein Konfidenzintervall mit der Breite von höchstens fünf Prozentpunkten ableiten lässt.

- a) Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, wenn das Konfidenzintervall ein Konfidenzniveau von 95 % haben soll? Welches Honorar ergibt sich für das Marktforschungsinstitut?
- b) Um wie viel Prozent erhöht sich das Honorar, wenn anstelle eines 95 %-Konfidenzintervall ein 99 %-Konfidenzintervall (ebenfalls mit einer Breite von höchstens fünf Prozentpunkten) als Ergebnis angestrebt wird?

Aufgabe 3 (Klausur vom 30.03.2005)

Bei der letzten Bundestagswahl am 22.9.2004 hat die SPD 38,5% aller Stimmen erhalten. Für die nächste Bundestagswahl im Jahr 2006 soll eine Wahlprognose für den Anteil der SPD-Wähler erstellt werden. Dazu wird vorgeschlagen, ein 0,95-Konfidenzintervall zu berechnen.

- a) Wie viele Wahlberechtigte sind zu befragen, damit die maximale Abweichung vom wahren Anteil höchstens $\pm 3\%$ -Punkte beträgt?

- b) Bei einer Umfrage unter 1 000 Wahlberechtigten gaben 34% an, für die SPD stimmen zu wollen. Berechnen Sie aus diesen Angaben das gewünschte Konfidenzintervall.
- c) Interpretieren Sie das unter b) berechnete Intervall.

Aufgabe 4 (Klausur vom 16.04.2004)

In einer Stadt mit 100 000 Einwohnern soll der Anteil der Raucher an der Gesamtbevölkerung geschätzt werden. Das Gesundheitsamt der Stadt verlangt, dass die durchzuführende Studie zu Ergebnissen kommt, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zutreffen. Bei einer Umfrage unter 897 Einwohnern befanden sich genau 269 Raucher.

Schätzen Sie anhand der Umfrage den Anteil der Raucher in der Stadt, wenn die oben genannte Anforderung erfüllt werden soll. Und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 5 (Klausur vom 06.02.2007)

Eine Unternehmung führt für ihr Produkt A eine Kundenanalyse durch. Dabei interessiert u.a., wie hoch der Anteil der „treuen“ Kunden ist, d.h. derjenigen Kunden, die das Produkt A seit mindestens zehn Jahren kaufen.

- a) Es soll ein 0,95-Konfidenzintervall für den Anteil der treuen Kunden berechnet werden. Wie viele Kunden sind zu befragen, damit der Anteil der treuen Kunden in der Stichprobe höchstens um drei Prozentpunkte vom Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit abweicht?
- b) Insgesamt wurden 1 246 Kunden befragt, seit wie vielen Jahren sie schon das Produkt A kaufen:

Jahre	Anzahl der Kunden
noch kein Jahr	641
1 bis unter 5 Jahre	367
5 bis unter 10 Jahre	128
10 bis unter 12 Jahre	87
12 Jahre oder länger	23
Σ	1 246

Berechnen Sie anhand der Stichprobe ein 0,95-Konfidenzintervall für den Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit.

- c) Interpretieren Sie das erhaltene Intervall unter b).

Lösung zu Aufgabe 1 (Klausur-Aufgabe 3 vom 28.09.2005)

p = Marktanteil in der Grundgesamtheit

$\hat{p} = \frac{2193}{8500} = 0,2580$ Marktanteil in der Stichprobe

Faustregel: $n = 8500 \geq 100$ ist erfüllt

$$0,95\text{-KI für } p = [0,2580 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2580 \cdot 0,7420}{8500}}] = [0,2580 \pm 0,0093] = [0,2487; 0,2673]$$

d.h. [25 %; 27 %] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Marktanteil der Bevölkerung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.

Lösung zu Aufgabe 2 (Klausur-Aufgabe 4 vom 12.07.2005)

Breite der Konfidenzintervalle: 0,05

halbe Breite der Konfidenzintervalle: $\epsilon = 0,025$

a) Mindeststichprobenumfang (Worstcase):

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,25}{0,025^2} = 1536,6$$

d.h. es sind mindestens 1537 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25000 + 10 \cdot 1537 = 40370$$

d.h. das Honorar würde 40370 GE betragen.

oder

Mindeststichprobenumfang:

$$\hat{p}_{\text{alt}} = 0,037$$

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,037 \cdot 0,963}{0,025^2} = 219,01$$

d.h. es sind mindestens 220 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25000 + 10 \cdot 220 = 27200$$

d.h. das Honorar würde 27200 GE betragen.

b) Mindeststichprobenumfang (Worstcase):

$$n \geq \frac{2,5758^2 \cdot 0,25}{0,025^2} = 2653,9$$

d.h. es sind mindestens 2654 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25000 + 10 \cdot 2654 = 51540 \text{ und } \frac{51540}{40370} = 1,277$$

d.h. das Honorar würde sich um etwa 28 % erhöhen.

oder

Mindeststichprobenumfang:

$$\hat{p}_{\text{alt}} = 0,037$$

$$n \geq \frac{2,5758^2 \cdot 0,037 \cdot 0,963}{0,025^2} = 378,2$$

d.h. es sind mindestens 379 Personen zu befragen.

$$\text{Honorar} = 25000 + 10 \cdot 379 = 28790 \text{ und } \frac{28790}{27200} = 1,0585$$

d.h. das Honorar würde sich um etwa 6 % erhöhen.

Lösung zu Aufgabe 3 (Klausur-Aufgabe 5 vom 30.03.2005)

a) 1. Lösungsweg:

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,385 \cdot 0,615}{0,03^2} = 1\,010,661$$

d.h. es sind mindestens 1 011 Wahlberechtigte zu befragen.

2. Lösungsweg:

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,25}{0,03^2} = 1\,067,111$$

d.h. es sind mindestens 1 068 Wahlberechtigte zu befragen.

b) Faustregel: $n = 1\,000 \geq 100$ ist erfüllt
0,95-KI für p :

$$0,34 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,34 \cdot 0,66}{1\,000}} = [0,31; 0,37]$$

c) [31%;37%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Stimmenanteil der SPD bei der kommenden Bundestagswahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt.

Lösung zu Aufgabe 4 (Klausur-Aufgabe 5 vom 16.04.2004)

p = Anteil der Raucher in der Stadt

$$\hat{p} = \frac{269}{897} \approx 0,30 = \text{Anteil der Raucher in der Stichprobe}$$

Stichprobenumfang: $n = 897$

Faustregel: $n = 897 \geq 100$ ist erfüllt

0,95-KI für p :

$$\left[0,3 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{897}} \right] = [0,3 \pm 0,03] = [0,27; 0,33]$$

d.h. [0,27;0,33] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Anteil der Raucher in der Stadt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.

Lösung zu Aufgabe 5 (Klausur-Aufgabe 3 vom 06.02.2007)

a) Mindeststichprobenumfang:

$$n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,25}{0,03^2} = 1\,067,1$$

d.h. es sind mindestens 1 068 Kunden zu befragen.

b) p = Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit

$$\hat{p} = \text{Anteil der treuen Kunden in der Stichprobe} = \frac{87+23}{1\,246} = 0,0883$$

Faustregel $n = 1\,246 \geq 100$ ist erfüllt

0,95-KI für $p=?$

$$0,0883 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,0883 \cdot 0,9117}{1\,246}} = 0,0883 \pm 0,0158 = [0,0725; 0,1041]$$

- c) d.h. [7,3%; 10,4%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Anteil der treuen Kunden in der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.