

**Technische Hochschule Köln**  
**Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften**  
Prof. Dr. Arrenberg  
Raum 221, Tel. 39 14  
jutta.arrenberg@th-koeln.de

## Wiederholung für eine Prüfung in QM II

### Aufgabe 1 (28.09.2017)

Frau A. hat am 01.01.2017 einen Kredit von 20 000 Euro aufgenommen. Die Jahreszinsen betragen 2,1%.

- a) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigen die Schulden erstmals den Betrag von 22 600 Euro
  - 1) bei linearer Verzinsung?
  - 2) bei nachschüssiger Verzinsung?
- b) Frau A. möchte die Schulden durch vorschüssige Quartalsraten in den Jahren 2017, 2018, 2019 und 2020 zurückzahlen. Wie hoch sind diese Quartalsraten?
- c) Frau A. möchte die Schulden durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von 350 Euro zurückzahlen. Die erste Monatsrate ist am 31.01.2017 fällig.
  - 1) Wie viele volle Monatsraten sind zu zahlen?
  - 2) Wie hoch ist die Restschuld einen Monat nach Zahlung der letzten vollen Monatsrate?

### Aufgabe 1 (27.09.2016)

Für einen Hauskauf werden zwei Kredite

- 100.000 Euro am 01.01.2017
- 50.000 Euro am 01.01.2018

aufgenommen. Die beiden Kredite sollen durch eine gemeinsame Annuitätentilgung über 15 Jahre zurückgezahlt werden. Die erste Annuität ist fällig am 31.12.2018. Der Jahreszins beträgt 2,2 %.

- a) Wie hoch sind die Annuitäten?
- b) Wie hoch ist die Restschuld am 01.01.2025?

- c) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das Jahr 2025 an.
- d) Am 01.01.2025 können vorzeitig 20.000 Euro zurückgezahlt werden.
- 1) An welchem Datum ist die letzte volle Annuität aus Teilaufgabe a) zu zahlen?
  - 2) Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

**Aufgabe 1.b)** (31.01.2019)

Ein Leasing-Vertrag für einen Pkw sieht wie folgt aus:

- 4 000 Euro Sofortzahlung
  - drei Jahre lang monatlich vorschüssig 420 Euro
  - Restzahlung am Ende des 3. Jahres in Höhe von 2 800 Euro, falls der Pkw dann gekauft werden soll.
1. Wie hoch ist der Barwert aller Zahlungen des Leasing-Vertrags bei einem Jahreszins von 2,2 %, wenn der Pkw nach drei Jahren erworben wird?
  2. Unerwartet möchte der Leasing-Nehmer am Ende des 2. Jahres vorzeitig aus dem Leasing-Vertrag aussteigen. Für den vorzeitigen Vertragsausstieg ist eine Gebühr von 3 000 Euro vereinbart, fällig zum Zeitpunkt des vorzeitigen Vertragsausstiegs. Welchen Wert haben die geleisteten Leasing-Zahlungen einschließlich der Gebühr zum Zeitpunkt des Vertragsausstiegs bei einem Jahreszins von 2,2 %?

**Aufgabe 1.b)** (23.09.2019)

Gehen Sie von folgenden Nutzerzahlen von Facebook in der BRD aus:

Jahr	Nutzer
2016	28 Mio.
2017	32 Mio
2018	37 Mio.

Mit welcher Nutzerzahl ist dann im Jahr 2019 in der BRD gemäß der Methode der kleinsten Quadrate zu rechnen?

**Aufgabe 2.b)** (31.01.2019)

In einem Land beträgt der Anteil der Frauen an der berufstätigen Bevölkerung 52%. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der berufstätigen Bevölkerung ausgewählte Person:

- männlich ist und einen überdurchschnittlichen Lohn bezieht, beträgt 24,0%.

- weiblich ist und einen nicht überdurchschnittlichen Lohn bezieht, beträgt 31,2%.
- 1) Stellen Sie die gegebenen Informationen in einer Arbeitstabelle oder einem Baumdiagramm dar, wobei das Geschlecht in der ersten Stufe und der Lohn in der zweiten Stufe des Baums stehen sollen.
  - 2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass:
    - a) eine zufällig ausgewählte berufstätige Person weiblich ist und einen überdurchschnittlichen Lohn bezieht.
    - b) eine zufällig ausgewählte berufstätige Person männlich ist und einen nicht überdurchschnittlichen Lohn bezieht.
    - c) eine zufällig ausgewählte berufstätige Person männlich ist, gegeben dass die Person einen nicht überdurchschnittlichen Lohn bezieht.

**Aufgabe 2** (28.09.2017)

Für sieben Unternehmen sind die folgenden Daten hinsichtlich der Anzahl der Mitarbeiter und des Börsenwerts (in Mio. Euro) zu beobachten:

Mitarbeiter	Börsenwert in Mio. Euro
1.235	6.200
1.489	4.027
1.703	9.191
2.754	14.802
4.872	11.486
8.982	27.122
10.289	31.996

- a) Die Variable  $X$  bezeichnet den Börsenwert in Mio. Euro. Klassieren Sie die Daten anhand der folgenden Klassen:

Börsenwert in Mio. Euro	Anzahl
$0 < X \leq 10.000$	
$10.000 < X \leq 20.000$	
$20.000 < X \leq 30.000$	
$30.000 < X \leq 40.000$	

und berechnen Sie anhand der klassierten Daten näherungsweise den Durchschnittswert des Börsenwerts in Mio. Euro.

- b) Berechnen Sie die Varianz und den Variationskoeffizienten der Mitarbeiter. Interpretieren Sie die berechneten Größen und gehen Sie dabei auf die Maßeinheiten von Varianz und Variationskoeffizient ein.
- c) Geben Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen Mitarbeiter und Börsenwert an und interpretieren Sie diesen.

Lösung zu Aufgabe 1 (28.09.2017):

a) 1.  $22\,600 = 20\,000(1 + n \cdot 0,021) \Leftrightarrow 1,13 = 1 + n \cdot 0,021 \Leftrightarrow 0,13 = n \cdot 0,021 \Leftrightarrow n = 6,190476$

d.h. bei linearer Verzinsung übersteigen die Schulden erstmals den Wert von 22 600 € nach sieben Jahren.

2.  $n = \frac{\ln \frac{22\,600}{20\,000}}{\ln 1,021} = 5,880784$

d.h. bei nachschüssiger Verzinsung übersteigen die Schulden erstmals den Wert von 22 600 € nach sechs Jahren.

b)  $20\,000 = r_J \cdot \frac{1,021^4 - 1}{0,021} \cdot \frac{1}{1,021^4} = r_J \cdot 3,798506 \Leftrightarrow r_J = 5\,265,227$

$5\,265,227 = r'_U \cdot (4 + 2,5 \cdot 0,021) = r'_U \cdot 4,0525 \Leftrightarrow r'_U = 1\,299,254$

d.h. die Quartalsraten betragen 1 299,25 €.

c)  $r_J = 350 \cdot (12 + 5,5 \cdot 0,021) = 4\,240,425$

1.  $n = -\frac{\ln \left[ 1 - \frac{20\,000}{4\,240,425} \cdot 0,021 \right]}{\ln 1,021} = 5,018724$

d.h. es sind  $5 \cdot 12 = 60$  volle Monatsraten zu zahlen. (Die letzte volle Monatsrate ist fällig am 31.12.2021.)

2.  $K_5 = 20\,000 \cdot 1,021^5 - 4\,240,425 \cdot \frac{1,021^5 - 1}{0,021} = 78,56003$

Die Restschuld beträgt einen Monat später bei relativ gemischter Verzinsung:

$78,56 \cdot \left( 1 + \frac{1}{12} \cdot 0,021 \right) = 78,70$

d.h. die Restschuld beträgt 78,70 €.

Lösung zu Aufgabe 1 (27.09.2016):

a)  $K_0 = 100\,000 \cdot 1,022 + 50\,000 = 152\,200$

$A = 152\,200 \cdot 1,022^{15} \cdot \frac{0,022}{1,022^{15} - 1} = 12\,022,997 \approx 12\,023$

d.h. die Annuitäten betragen 12 023 €.

b)  $K_7 = 152\,200 \cdot 1,022^7 - 12\,023 \cdot \frac{1,022^7 - 1}{0,022} = 87\,319,94$

d.h. die Restschuld beträgt 87 319,94 €.

c)  $Z_8 = K_7 \cdot i$   
 $T_8 = A - Z_8$

$$K_8 = K_7 - T_8$$

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Tilgung a.E.d.J.	Annuität a.E.d.J.	Restschuld a.E.d.J.
8	1 921,04	10 101,96	12 023,00	77 217,98

d)  $K_0 = 87\,319,94 - 20\,000 = 67\,319,94$

$$1. n = -\frac{\ln \left[ 1 - \frac{67\,319,94}{12\,023} \cdot 0,022 \right]}{\ln 1,022} = 6,040848$$

d.h. es sind noch sechs volle Annuitäten in Höhe von 12 023 € zu zahlen; d.h. am 31.12.2030 ist die letzte volle Annuität zu zahlen.

$$2. K_6 = 67\,319,94 \cdot 1,022^6 - 12\,023 \cdot \frac{1,022^6 - 1}{0,022} = 485,58$$

$$485,58 \cdot 1,022 = 496,26$$

d.h. die Restzahlung beträgt 496,25 €.

*Lösung zu Aufgabe 1.b) (31.01.2019):*

$$1. K_0 = 4\,000 + 420 \cdot (12 + 6,5 \cdot 0,022) \cdot \frac{1,022^3 - 1}{0,022} \cdot \frac{1}{1,022^3} + \frac{2\,800}{1,022^3} = 21\,273,91$$

d. h. der Barwert beträgt 21 273,91 Euro.

2. 1. Lösungsweg:

$$K_2 = 4\,000 \cdot 1,022^2 + 420 \cdot (12 + 6,5 \cdot 0,022) \cdot \frac{1,022^2 - 1}{0,022} + 3\,000 = 17\,490,26$$

d. h. die geleisteten Zahlungen betragen 17 490,26 Euro.

2. Lösungsweg:

$$R_0 = 420 \cdot (12 + 6,5 \cdot 0,022) \cdot \frac{1,022^2 - 1}{0,022} \cdot \frac{1}{1,022^2} = 9\,873,125$$

Zu  $R_0$  wird die Sofortzahlung addiert:

$$K_0 = 4\,000 + 9\,873,125 = 13\,873,125$$

Dieser Wert beträgt nach zwei Jahren:

$$K_2 = 13\,873,125 \cdot 1,022^2 = 14\,490,26$$

Zusammen mit der „Strafgebühr“ ergibt das:

$$14\,490,26 + 3\,000 = 17\,490,26$$

*Lösung zu Aufgabe 1.b) (23.09.2019):*

1. Lösungsweg:

$X$  = Jahr

$Y$  = Anzahl Nutzer

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
2016	28			
2017	32			
2018	37			
6 051	97	195 658	12 204 869	3 177

Gesucht:  $a_1 + b_1 \cdot 2019 = ?$

$$\bar{x} = \frac{6\,051}{3} = 2017 \text{ und } \bar{y} = \frac{97}{3} = 32,\bar{3}$$

$$s_x^2 = \frac{12\,204\,869}{3} - 2017^2 = 0,\bar{6} \Leftrightarrow s_x = \sqrt{0,\bar{6}} = 0,8165$$

$$s_y^2 = \frac{3\,177}{3} - 32,\bar{3}^2 = 13,\bar{5} \Leftrightarrow s_y = 3,6818$$

$$s_{xy} = \frac{195\,658}{3} - 2017 \cdot 32,\bar{3} = 3$$

$$r_{xy} = \frac{3}{0,8165 \cdot 3,6818} = 0,9979$$

$$b_1 = \frac{3}{0,8165^2} = 4,5$$

$$a_1 = 32,\bar{3} - 4,5 \cdot 2017 = -9\,044,167$$

$$a_1 + b_1 \cdot 2019 = 41,3 \approx 41$$

d.h. es ist mit etwa 41 Millionen Nutzern zu rechnen.

2. Lösungsweg:

$X$  = Jahr

$Y$  = Anzahl Nutzer

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$
2016	28		
2017	32		
2018	37		
6 051	97	195 658	12 204 869

Gesucht:  $a_1 + b_1 \cdot 2019 = ?$

$$b_1 = \frac{3 \cdot 195\,658 - 6\,051 \cdot 97}{3 \cdot 12\,204\,869 - 6\,051^2} = 4,5$$

$$a_1 = \frac{97 - 4,5 \cdot 6\,051}{3} = -9\,044,1\bar{6}$$

$$a_1 + b_1 \cdot 2019 = 41,3 \approx 41$$

d.h. es ist mit etwa 41 Millionen Nutzern zu rechnen.

3. Lösungsweg:  $X$ =Zeitpunkte (6,7,8)

$Y$  = Anzahl Nutzer

$x_i$	$y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2$
6	28		
7	32		
8	37		
21	97	688	149

Gesucht:  $a_1 + b_1 \cdot 9 = ?$

$$b_1 = \frac{3 \cdot 688 - 21 \cdot 97}{3 \cdot 149 - 21^2} = 4,5$$

$$a_1 = \frac{97 - 4,5 \cdot 21}{3} = 0,8\bar{3}$$

$$a_1 + b_1 \cdot 9 = 41,3 \approx 41$$

d.h. es ist mit etwa 41 Millionen Nutzern zu rechnen.

*Lösung zu Aufgabe 2.b) (31.01.2019):*

1.  $w$  = weiblich

$m$  = männlich

$\bar{u}$  = Lohn liegt über dem Durchschnitt

$\bar{u}$  = Lohn liegt nicht über dem Durchschnitt

$$0,520 = P(w)$$

$$0,240 = P(m \cap \bar{u})$$

$$0,312 = P(w \cap \bar{u})$$

1. Lösungsweg: Arbeitstabelle:

	$w$	$m$	
$\bar{u}$	0,312	0,240	0,552
$\bar{u}$	0,208	0,240	0,448
	0,520	0,480	1

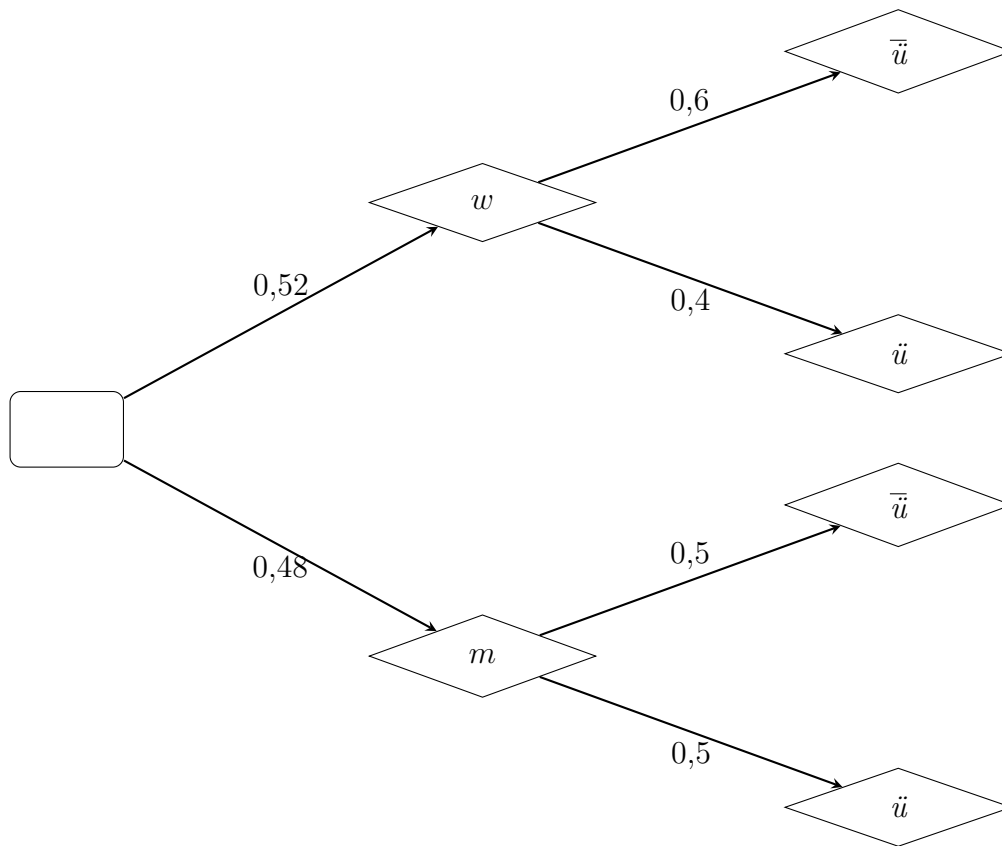
2. Lösungsweg: Baumdiagramm:

$$P(m) = 1 - 0,52 = 0,48$$

$$P(\bar{u} | m) = \frac{0,24}{0,48} = 0,5 \Rightarrow P(\bar{u} | m) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(\bar{u} | w) = \frac{0,312}{0,52} = 0,6 \Rightarrow P(\bar{u} | w) = 1 - 0,6 = 0,4$$





- a)  $P(w \cap \bar{u}) = 0,208$   
 b)  $P(m \cap \bar{u}) = 0,240$   
 c)  $P(m | \bar{u}) = \frac{0,240}{0,552} \approx 0,435$

*Lösung zu Aufgabe 2 (28.09.2017)*

a) Für  $X$  = „Börsenwert (in Mio Euro)“ ergeben sich die folgenden klassierten Daten:

Klasse	$n_j$	$x'_j$
$0 < X \leq 10.000$	3	5 000
$10.000 < X \leq 20.000$	2	15 000
$20.000 < X \leq 30.000$	1	25 000
$30.000 < X \leq 40.000$	1	35 000
$\Sigma$	$n = 7$	

$$\bar{x} \approx \frac{1}{7} [5\,000 \cdot 3 + 15\,000 \cdot 2 + 25\,000 \cdot 1 + 35\,000 \cdot 1] = 15\,000$$

b) Arbeitstabelle für  $X$ :

$i$	$x_i$	$x_i^2$
1	1 235	1 525 225
2	1 489	2 217 121
3	1 703	2 900 209
4	2 754	7 584 516
5	4 872	23 736 384
6	8 982	80 676 324
7	10 289	105 863 521
$\Sigma$	31 324	224 503 300

$$\bar{x} \approx \frac{31\,324}{7}$$

$$s_x^2 \approx \frac{224\,503\,300}{7} - \left(\frac{31\,324}{7}\right)^2 \approx 12\,047\,554$$

d.h. die Schwankungen im Datensatz gemessen mit der empirischen Varianz betragen näherungsweise 12 047 554 Mitarbeiter · Mitarbeiter.

$$v_x \approx \frac{\sqrt{12\,047\,554}}{31\,324/7} = 0,775658$$

d.h. die Schwankungen im Datensatz gemessen mit dem Variationskoeffizienten betragen etwa 78% Prozent vom arithmetischen Mittel.

- c) Mit  $X$  = „Anzahl Mitarbeiter“ und  $Y$  = „Börsenwert“ ergibt sich folgende Arbeitstabelle:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$
1	1 235	6 200	1 525 225	38 440 000	7 657 000
2	1 489	4 027	2 217 121	16 216 729	5 996 203
3	1 703	9 191	2 900 209	84 474 481	15 652 273
4	2 754	14 802	7 584 516	219 099 204	40 764 708
5	4 872	11 486	23 736 384	131 928 196	55 959 792
6	8 982	27 122	80 676 324	735 602 884	243 609 804
7	10 289	31 996	105 863 521	1 023 744 016	329 206 844
$\Sigma$	31 324	104 824	224 503 300	2 249 505 510	698 846 624

1. Lösungsweg:

$$\bar{x} = \frac{31\,324}{7} = 4\,474\frac{6}{7} \text{ und } \bar{y} = \frac{104\,824}{7} = 14\,974\frac{6}{7}$$

$$s_x^2 = \frac{224\,503\,300}{7} - \left(4\,474\frac{6}{7}\right)^2 = 12\,047\,554 \Leftrightarrow s_x = 3\,470,959$$

$$s_y^2 = \frac{2\,249\,505\,510}{7} - \left(14\,974\frac{6}{7}\right)^2 = 97\,111\,584 \Leftrightarrow s_y = 9\,854,521$$

$$s_{xy} = \frac{698\,846\,624}{7} - 4\,474\frac{6}{7} \cdot 14\,974\frac{6}{7} = 32\,824\,886$$

$$r_{xy} = \frac{32\,824\,886}{3\,470,959 \cdot 9\,854,521} = 0,959\,662$$

d.h. es gibt einen starken positiven linearen Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$ ; d.h. es gibt eine starke Tendenz dafür, dass mit steigender Anzahl der Mitarbeiter auch der Börsenwert eines Unternehmens steigt.

2. Lösungsweg:

$$b_1 = \frac{7 \cdot 698\,846\,624 - 31\,324 \cdot 104\,824}{7 \cdot 224\,503\,300 - 31\,324^2} = \frac{1\,608\,419\,392}{590\,330\,124} = 2,72461$$

$$b_2 = \frac{1\,608\,419\,392}{7 \cdot 2\,249\,505\,510 - 104\,824^2} = \frac{1\,608\,419\,392}{4\,758\,467\,594} = 0,3380121$$

$$r_{xy} = \sqrt{2,72461 \cdot 0,3380121} = 0,959662$$

d.h. es gibt einen starken positiven linearen Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$ ; d.h. es gibt eine starke Tendenz dafür, dass mit steigender Anzahl der Mitarbeiter auch der Börsenwert eines Unternehmens steigt.