Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Wiederholung für eine Prüfung in QM III

Aufgabe 3 (12.07.2005)
Die Deutsche Bundesbank veröffentlichte in diversen Monatsberichten folgende Angaben zum Preisindex für die Lebenshaltung auf Basis 1995=100, zum neuen Verbraucherpreisindex auf Basis 2000=100 und zum Preisindex für Energie auf Basis 2000=100:

Jahr	Preisindex für die Lebenshaltung (1995=100)	Verbraucherpreisindex insgesamt (2000=100)	Preisindex für Energie (2000=100)
1998	104,3		
1999	104,9		
2000	106,9	100,0	100,0
2001		102,0	105,7
2002		103,4	106,0
2003		104,5	110,2
2004		106,2	114,8

a) Was besagt der Indexstand von 106,2 für den Verbraucherpreisindex im Jahr 2004?

b) Für den Preisanstieg seit dem Basisjahr 2000 wird vielfach die Preissteigerung für Energie verantwortlich gemacht. Um wie viel Prozent wären die Verbraucherpreise ohne Energie im Zeitraum von 2000 bis 2004 gestiegen? Gehen Sie bei Ihrer Berechnung davon aus, dass das Gewicht von Energie bezogen auf alle Verbrauchsausgaben 4,7 % beträgt.

c) Wie hoch war die durchschnittliche jährliche Inflationsrate im Zeitraum von 1998 bis 2004?

Aufgabe 2 (02.02.2016)
Jeder Mitarbeiter des Qualitätsmanagements eines Automobilherstellers überprüft täglich zehn Neuwagen. Besteht ein Fahrzeug nicht die Qualitätskontrolle, so sind Nachbesserungen erforderlich. Das Bestehen oder Nicht-Bestehen der Qualitätskontrolle der einzelnen Fahrzeuge können als stochastisch unabhängig voneinander angenommen werden.

Aus Erfahrung ist bekannt, dass 15% der Fahrzeuge des Modells A die Qualitätskontrolle nicht bestehen.

a) Wie viele untaugliche Fahrzeuge des Modells A entdeckt ein Mitarbeiter erwartungsgemäß

1. pro Tag?
2. pro Monat? Gehen Sie davon aus, dass ein Monat 22 Arbeitstage hat.

b) Wie viele Neuwagen von Modell A sortiert ein Mitarbeiter pro Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens aus? Gehen Sie davon aus, dass ein Monat 22 Arbeitstage hat.

c) Aus Erfahrung ist bekannt, dass 25% der Fahrzeuge des Modells B die Qualitätskontrolle nicht bestehen.

   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitarbeiter an einem Tag höchstens bei zwei Neuwagen des Modells B Nachbesserungsbedarf feststellt?
   2. Ein Mitarbeiter der Qualitätskontrolle erzählt Ihnen, dass er gestern zehn Autos des gleichen Modells überprüft hat, von denen genau zwei defekt waren. Die Fahrzeuge eines welchen der beiden Modelle hat er gestern mit einer größeren Wahrscheinlichkeit überprüft?

Aufgabe 5 (28.09.2005)
Die Ausgabemenge (in ml) eines Kaffeeautomatens sei normalverteilt. Die mittlere Ausgabemenge sollte 200 ml betragen, weicht hiervon jedoch im Mittel um 10 % nach unten ab. Die theoretische Standardabweichung beträgt 10 ml.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgabemenge weniger als 170 ml beträgt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgabemenge zwischen 170 ml und 200 ml liegt?

c) Welche Ausgabemenge wird in 97,5% der Fälle nicht überschritten?

d) Welche Ausgabemenge wird in 80% der Fälle überschritten?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Ausgabemenge von genau 200 ml zu erhalten?

Aufgabe 2 (01.10.2012)
Ein Marktforschungsinstitut möchte für den Bekanntheitsgrad eines Produkts ein 92%-Konfidenzintervall berechnen.

a) Wie hoch ist der Stichprobenumfang mindestens zu wählen, damit das gesuchte Konfidenzintervall höchstens die Breite von acht Prozentpunkten hat?

b) Das Institut befragt 500 Personen. Von den Befragten kannten 347 das Produkt. Berechnen und interpretieren Sie das gesuchte Konfidenzintervall.

Aufgabe 2 (25.01.2017)
Das Jahreseinkommen (in Euro) eines Einwohners eines Landes sei normalverteilt mit der Standardabweichung 8 000 Euro. Die Präsidentin dieses Landes behauptet im Wahlkampf: „Unsere politischen Maßnahmen haben dazu geführt, dass das Jahresdurchschnittseinkommen in unserem Land mittlerweile 35 000 Euro beträgt.“

a) 1. Formulieren Sie die Aussage der Präsidentin als Nullhypothese und stellen Sie die zugehörige Gegenhypothese auf.
   2. Welcher statistische Test ist grundsätzlich geeignet, um die Aussage zu belegen oder widerlegen?
   3. Was sind die Voraussetzungen, um diesen Test anwenden zu können?

b) Unter 500 Einwohnern des Landes wird daraufhin von der Opposition eine Umfrage durchgeführt, die ein Jahresdurchschnittseinkommen von nur 34 000 Euro ausweist.

   1. Kann der Präsidentin auf Grundlage des von Ihnen unter Teilaufgabe a) genannten statistischen Tests zum Signifikanzniveau 0,05 vorgeworfen werden, die Fakten zu verdrehen?
   2. Beschreiben Sie in Worten, für welche Signifikanzniveaus die Entscheidung des statistischen Tests dieselbe bleibt wie in Teilaufgabe b.1).
   3. Begründen Sie hiervon ausgehend, wie Sie die Aussagekraft Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe b.1) einordnen.
   4. Verwenden Sie, falls möglich, einen weiteren statistischen Test zum Signifikanzniveau 0,05, um nachzuweisen, in welche Richtung eine Abweichung von der Aussage der Präsidentin zu beobachten ist. Falls die Anwendung eines solchen statistischen Tests hier nicht sinnvoll ist, begründen Sie, weshalb das so ist.

Lösung zu Aufgabe 3 vom 12.07.2005:

a) Der Verbraucherpreisindex ist im Zeitraum von 2000 bis 2004 um 6,2 % insgesamt gestiegen.

b) Wir betrachten nur die beiden Bedarfsgruppen „Energie“ und „alle Bedarfsgruppen, jedoch ohne Energie“
Der Preisindex für die erste Bedarfsgruppe beträgt 114,8 und das zugehörige Gewicht beträgt 4,7 %.
Der Preisindex für die zweite Bedarfsgruppe ist gesucht und wird im Folgenden mit x bezeichnet. Das zugehörige Gewicht der zweiten Bedarfsgruppe beträgt: $100\% - 4{,}7\% = 95{,}3\%$. Somit haben wir:

Waren-	2000		2004	
gruppe	Gewicht	Index	Gewicht	Index
Energie	0,047	100		114,8
Übrige	0,953	100		x
VPI	100		106,2	

Der gesamte Preisindex von 106,2 lässt sich wie folgt aus den beiden Bedarfsgruppen berechnen:
$106{,}2 = 0{,}953 \cdot x + 0{,}047 \cdot 114{,}8 \Rightarrow x = \dfrac{106{,}2 - 0{,}047 \cdot 114{,}8}{0{,}953} = 105{,}8$
d.h. ohne die Ausgaben für Energie wäre der Verbraucherpreisindex im Zeitraum von 2000 bis 2004 um insgesamt 5,8 % gestiegen.

c)

Steigerung im Zeitraum 1998 bis 2000:	$\dfrac{106{,}9}{104{,}3} = 1{,}0249280 \widehat{=} +2{,}49280\%$
Steigerung im Zeitraum 2000 bis 2004:	$+6{,}2$ %
Steigerung im Zeitraum 1998 bis 2004:	$1{,}0249280 \cdot 1{,}062 = 1{,}088474$

durchschnittliche jährliche Steigerung im Zeitraum von 1998 bis 2004:
$\sqrt[2004-1998]{1{,}088474} = \sqrt[6]{1{,}088474} = 1{,}0142 \widehat{=} +1{,}4\%$
d.h. im Zeitraum von 1998 bis 2004 betrug die durchschnittliche jährliche Inflationsrate +1,4 %.

Lösung zu Aufgabe 2 vom 02.02.2016

a) Es bezeichne X_A die Anzahl der defekten Autos vom Tpy A unter den n hergestellten Autos vom Typ A. Die Zufallsvariable X_A ist binomialverteilt mit Parametern n und $p = 0{,}15$.

1. $n = 10$
   Deshalb gilt
   $$E[X_A] = 10 \cdot 0{,}15 = 1{,}5.$$
   Also entdeckt ein Qualitätskontrolleur pro Tag erwartungsgemäß 1,5 defekte Neuwagen.

2. $n = 22 \cdot 10 = 220$

$$E[X_A] = 220 \cdot 0{,}15 = 33$$

Also entdeckt ein Qualitätskontrolleur pro Monat erwartungsgemäß 33 defekte Neuwagen.

b) Laut Aufgabenstellung ist danach gefragt, welche Anzahl von defekten Neuwagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% überschritten wird, also ist das x gesucht, welches die Gleichung

$$0{,}95 = P(X_A \geq x) \Leftrightarrow 0{,}05 = P(X_A < x) = P(X_A \leq x-1)$$

erfüllt. Pro Monat werden pro Mitarbeiter $n = 220$ Autos kontrolliert, von denen jedes einzelne weiterhin mit $p = 0{,}15$ durch die Qualitätskontrolle fällt. Wegen

$$n \cdot p = 33 \geq 10 \quad \text{und} \quad n \cdot (1-p) = 187 \geq 10$$

ist die Faustregel erfüllt, um die Binomial-/ Normalverteilungsapproximation zu verwenden. Folglich gilt

$$0{,}05 = P(X_A \leq x-1) \approx F_U\left(\frac{x-1+0{,}5-33}{\sqrt{220 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}}\right) = F_U\left(\frac{x-33{,}5}{\sqrt{28{,}05}}\right)$$

bzw.

$$-1{,}6449 = \frac{x-33{,}5}{\sqrt{28{,}05}}.$$

Diese Gleichung impliziert $x \approx 33{,}5 - 1{,}6449 \cdot 5{,}296 \approx 24{,}79 \approx 25$. Also sortiert ein Mitarbeiter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% pro Monat mindestens 25 Neuwagen des Modells A aus.

c) Es bezeichne X_B die Anzahl der defekten Wagen des Modells B unter den n hergestellten Wagen vom Modell B. Die Zufallsvariable X_B ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.

1. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} P(X_B \leq 2) &= \binom{10}{0} 0{,}25^0 0{,}75^{10} + \binom{10}{1} 0{,}25^1 0{,}75^9 + \binom{10}{2} 0{,}25^2 0{,}75^8 \\ &\approx 0{,}0563 + 0{,}1877 + 0{,}2816 = 0{,}5256. \end{aligned}$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag höchstens 2 Neuwagen des Modells B defekt sind 52,56%.

2. Bereits in Aufgabenteil c.1) wurde die Wahrscheinlichkeit $P(X_B = 2) = 0{,}2816$ berechnet. Es gilt ferner

$$P(X_A = 2) = \binom{10}{2} 0{,}15^2 0{,}85^8 = 0{,}2759 < 0{,}2816 = P(X_B = 2).$$

Deshalb hat der Kontrolleur mit einer größeren Wahrscheinlichkeit Fahrzeuge vom Modell B überprüft.

Lösung zu Aufgabe 5 vom 28.09.2005
X = tatsächliche Ausgabemenge (in ml) für eine Kaffeetasse
200 - 10% von 200= $200 \cdot 0{,}9 = 180$
$X \sim \mathsf{N}(\mu = 180; \sigma = 10)$

a) $P(X < 170) = P(X \leq 170) = F_U\left(\frac{170 - 180}{10}\right) = F_U(-1) = 0{,}159$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,159.

b) $P(X \leq 200) - P(X \leq 170) = F_U(\frac{200 - 180}{10}) - 0{,}159 = F_U(2) - 0{,}159 = 0{,}977 - 0{,}159 = 0{,}818$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,818.

c) $0{,}975 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x - 180}{10}\right)$
$1{,}96 = \frac{x - 180}{10} \Rightarrow x = 180 + 1{,}96 \cdot 10 = 199{,}6$
d.h. in 97,5 % aller Fälle liegt die Ausgabemenge unter 199,6 ml.

d) $0{,}20 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x - 180}{10}\right)$
$-0{,}8416 = \frac{x - 180}{10} \Rightarrow x = 180 - 0{,}8416 \cdot 10 = 171{,}6$
d.h. in 80 % aller Fälle liegt die Ausgabemenge über 171,6 ml.

e) $P(X = 200) = 0$; d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt null.

Lösung zu Aufgabe 2 vom 01.10.2012

a) $n \geq \frac{1{,}7507^2 \cdot 0{,}25}{0{,}04^2} = 478{,}9$
d.h. der Mindeststichprobenumfang muss 479 betragen.

b) Faustregel $n = 500 \geq 100$ ist erfüllt!
$\frac{347}{500} \pm 1{,}7507 \cdot \sqrt{\frac{\frac{347}{500} \cdot \frac{153}{500}}{500}} = 0{,}694 \pm 0{,}036 = [0{,}658\,;\, 0{,}730]$
d.h. [66%;73%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Bekanntheitsgrad des Produkts mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% liegt.

Lösung zu Aufgabe 2 vom 25.01.2017
Die Zufallsvariable X beschreibe das Jahreseinkommen (in Euro) eines Einwohners des Staates. Nach Angabe gilt, dass $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 8\,000)$.

a) 1. Die Aussage der Präsidentin mündet in das Testproblem:
$$H_0 : E[X] = 35\,000 \text{ gegen } H_1 : E[X] \neq 35\,000.$$

2. Es sollte der (zweiseitige) Gaußtest durchgeführt werden.
3. Weil es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable mit bekannter (theoretischer) Varianz handelt, sind die Voraussetzungen für den Gaußtest erfüllt.

b)
1. Wir berechnen den p-Wert:
$$2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{34\,000 - 35\,000}{8\,000/\sqrt{500}}\right|\right) \approx 2 \cdot F_U(-2{,}7951) \approx 2 \cdot 0{,}003 = 0{,}006.$$
Weil der p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ ist, wird die Nullhypothese abgelehnt. Das heißt, dass der Präsidentin zum Signifikanzniveau 0,05 zurecht vorgeworfen werden kann, die Tatsachen zu verdrehen.
2. Die Nullhypothese wird anhand dieser Stichprobe für alle Signifikanzniveaus $\alpha \geq 0{,}006$ abgelehnt.
3. *1. Lösungsweg:*
Je kleiner der p-Wert ist, desto unplausibler ist H_0.
2. Lösungsweg:
Für einen p-Wert $\leq 0{,}01$ wird von einem hoch-signifikanten Ergebnis des Tests gesprochen, so dass wir mit großer Sicherheit auf das Ergebnis auf Teilaufgabe b.1) vertrauen können.
4. Wegen der Ablehnung der Nullhypothese ist es sinnvoll, auch den einseitigen Gaußtest durchzuführen. Die Gegenhypothese muss dabei die Situation der Stichprobe widerspiegeln, also:
$$H_0 : E[X] \geq 35\,000 \text{ gegen } H_1 : E[X] < 35\,000.$$
Gemäß Aufgabenteil b.1) ergibt sich für den p-Wert:
$$p\text{-Wert} = \frac{0{,}006}{2} = 0{,}003.$$
Wegen $0{,}003 < 0{,}05$ wird die Nullhypothese des einseitigen Gaußtests abgelehnt, das heißt das Jahresdurchschnittseinkommen eines Einwohners ist im Mittel signifikant niedriger als von der Präsidentin behauptet.