

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Ratentilgung

Aufgabe 10.1

Am 01.01.2011 wurde zu 4,2% Jahreszins eine Schuld in Höhe von 200 000 Euro aufgenommen, die mittels Ratentilgung binnen zehn Jahren zurückgezahlt werden soll, wobei die ersten beiden Jahre tilgungsfrei (Zinsen müssen jedoch gezahlt werden) sind.

- a) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das zweite und das fünfte Jahr an.
- b) Wie hoch ist die Annuität im vorletzten Tilgungsjahr?
- c) Wie hoch ist die Restschuld am Ende des siebten Jahres?
- d) Wie hoch ist die Zinszahlung im letzten Tilgungsjahr?

Aufgabe 10.2

Eine Anleihe von GE 1 000 000 soll zu 4% p.a. verzinst und im Verlauf der nächsten fünf Jahre durch gleich hohe Tilgungsbeträge zurückgezahlt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Aufgabe 10.3

Eine Schuld (Hypothek) von GE 100 000 wird zu 5% p.a. verzinst und durch Tilgungsraten von GE 4 000, d.h. mit 4% getilgt. Damit ist die Tilgungsdauer auf 25 Jahre festgelegt.

- a) Wie hoch sind die Zinsen im 17-ten Jahr?
- b) Wie hoch ist der Barwert aller Zinszahlungen?

Aufgabe 10.4

Zur Ratentilgung Ihrer Schuld von GE 50 000 bietet Ihnen Ihre Bank zwei Alternativen an:

- a) Sie tilgen die Schuld binnen zehn Jahren bei 6% nachschüssigen Jahreszinsen.
- b) Sie tilgen die Schuld binnen fünf Jahren bei 4% nachschüssigen Jahreszinsen.

Für welche der Alternativen entscheiden Sie sich auf Grund des Vergleichs der Barwerte der Zinszahlungen?

Aufgabe 10.5

Sie nehmen am 01.01.2009 eine Schuld von GE 20 000 auf zu 8% nachschüssiger

Verzinsung. Sie verpflichten sich, die Schuld bis zum 31.12.2018 getilgt zu haben. Mit der ersten Zahlung der Ratentilgung beginnen Sie erst am 31.12.2011. Geben Sie den Tilgungsplan für den Fall an, dass Sie während der tilgungsfreien Zeit

- a) keine Zinszahlungen leisten (wodurch die Schuld steigt).
- b) lediglich die anfallenden Zinsen bezahlen.

Aufgabe 10.6

Zur Finanzierung seines Studiums hat jemand 6 Jahre lang, jeweils zu Jahresbeginn, Darlehen aufgenommen. In den ersten beiden Jahren hat er sich je GE 10 000, in den verbleibenden 4 Jahren je GE 12 000 auszahlen lassen, wobei die Verzinsung durchgehend 10% beträgt. Am Ende des sechsten Jahres nimmt er nochmals einen Betrag auf, der seine Gesamtschulden zu diesem Zeitpunkt auf GE 100 000 (einschließlich Zinseszinsen) anwachsen lässt.

- a) Wie hoch ist dieser Betrag?
- b) Die Gesamtschulden sollen innerhalb eines Zeitraums von fünfzehn Jahren in gleich bleibenden Tilgungsraten getilgt werden. Dabei sind die ersten fünf Jahre tilgungsfrei (d. h. lediglich die Zinsen werden bezahlt). Wie hoch sind der Zinsbetrag, die Tilgungsrate, die Annuität und die Restschuld nach vier sowie nach zehn Jahren?

Lösung zu Aufgabe 10.1

$$T = 200\,000 \div 8 = 25\,000$$

a)

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
2	8 400	0	8 400	200 000
5	6 300	25 000	31 300	125 000

$$K_4 = K_0 - 2 \cdot T = 150\,000$$

$$Z_5 = K_4 \cdot i = 150\,000 \cdot 0,042 = 6\,300$$

$$A_5 = Z_5 + T = 31\,300$$

$$K_5 = K_4 - T = 125\,000$$

b) $K_8 = K_0 - 6 \cdot T = 50\,000$

$$Z_9 = K_8 \cdot i = 50\,000 \cdot 0,042 = 2\,100$$

$$A_9 = Z_9 + T = 27\,100$$

c) $K_7 = K_0 - 5 \cdot T = 75\,000$

d) $K_9 = K_0 - 7 \cdot T = 25\,000$

$$Z_{10} = K_9 \cdot i = 1\,050$$

Lösung zu Aufgabe 10.2

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	40 000	200 000	240 000	800 000
2	32 000	200 000	232 000	600 000
3	24 000	200 000	224 000	400 000
4	16 000	200 000	216 000	200 000
5	8 000	200 000	208 000	0

Lösung zu Aufgabe 10.3

a) $Z_{17} = 1\,800$

b) $Z_0 = 43\,624,22$

Lösung zu Aufgabe 10.4

a) $Z_0 = 13\,199,55$

b) $Z_0 = 5\,481,78$;d.h. Entscheidung für b)

Lösung zu Aufgabe 10.5

a) Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	1 600	-	-	21 600
2	1 728	-	-	23 328
3	1 866,24	2 916	4 782,24	20 412
4	1 632,96	2 916	4 548,96	17 496
5	1 399,68	2 916	4 315,68	14 580
6	1 166,40	2 916	4 082,40	11 664
7	933,12	2 916	3 849,12	8 748
8	699,84	2 916	3 615,84	5 832
9	466,56	2 916	3 382,56	2 916
10	233,28	2 916	3 149,28	0

b) Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	1 600	-	1 600	20 000
2	1 600	-	1 600	20 000
3	1 600	2 500	4 100	17 500
4	1 400	2 500	3 900	15 000
5	1 200	2 500	3 700	12 500
6	1 000	2 500	3 500	10 000
7	800	2 500	3 300	7 500
8	600	2 500	3 100	5 000
9	400	2 500	2 900	2 500
10	200	2 500	2 700	0

Lösung zu Aufgabe 10.6:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 100\,000 &= 10\,000 \cdot 1,1 \cdot \frac{1,1^2 - 1}{0,1} \cdot 1,1^4 + 12\,000 \cdot 1,1 \cdot \frac{1,1^4 - 1}{0,1} + x \\
 &= 23\,100 \cdot 1,1^4 + 61\,261,20 + x \\
 &= 33\,820,71 + 61\,261,20 + x \\
 &= 95\,081,91 + x \\
 \Rightarrow x &= 100\,000 - 95\,081,91 = 4\,918,09
 \end{aligned}$$

b) Jahr	Tilgungsjahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1		10 000	-	10 000	100 000
2		10 000	-	10 000	100 000
3		10 000	-	10 000	100 000
4		10 000	-	10 000	100 000
5		10 000	-	10 000	100 000
6	1	10 000	10 000	20 000	90 000
7	2	9 000	10 000	19 000	80 000
8	3	8 000	10 000	18 000	70 000
9	4	7 000	10 000	17 000	60 000
10	5	6 000	10 000	16 000	50 000
11	6	5 000	10 000	15 000	40 000
12	7	4 000	10 000	14 000	30 000
13	8	3 000	10 000	13 000	20 000
14	9	2 000	10 000	12 000	10 000
15	10	1 000	10 000	11 000	0

$$T_4 = 0, A_4 = 10\,000, K_4 = 100\,000$$

$$T_{10} = T = \frac{100\,000}{10} = 10\,000$$

$$Z_{10} = (10 - 5 + 1) \cdot T \cdot \frac{p}{100} = 6 \cdot 10\,000 \cdot 0,10 = 6\,000$$

$$A_{10} = Z_{10} + T = 6\,000 + 10\,000 = 16\,000$$

$$K_{10} = (10 - 5) \cdot T = 5 \cdot 10\,000 = 50\,000$$

oder

$$Z_{10} = K_9 \cdot i = (100\,000 - 4 \cdot T) \cdot \frac{p}{100} = 60\,000 \cdot 0,10 = 6\,000$$

$$A_{10} = Z_{10} + T = 6\,000 + 10\,000 = 16\,000$$

$$K_{10} = 100\,000 - 5 \cdot T = 50\,000$$