Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Jährliche vorschüssige Renten

Aufgabe 7.1
Jemand zahlt bei 4% Jahreszins auf ein Konto zwanzig Jahre lang jeweils zu Beginn eines Jahres 1 000 GE ein.

a) Wann übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 8 000 GE? (*Lösung: n=6,8 d.h. nach sieben Jahren*)

b) Er hebt nach fünf Jahren 3 000 GE ab und zahlt nach siebzehn Jahren 2 000 GE ein. Wie hoch ist das Guthaben nach zwanzig Jahren? (*Lösung: 27 816,10 GE*)

Aufgabe 7.2
Eine Maschine wird gekauft. Als Zahlung wird vereinbart, bei 4% Zinseszins p.a. fünf Jahre lang nachschüssige Raten in Höhe von jeweils 6 000 GE zu entrichten.

a) Wie hoch ist der Kaufpreis der Maschine? (*Lösung: 26 710,93 GE*)

b) Es gibt Liquiditätsschwierigkeiten: Statt wie ursprünglich vereinbart werden jetzt zwei Jahre lange keine Zahlungen geleistet, dann vorschüssig drei Jahre lang entsprechend höhere Raten. Wie hoch sind die drei Raten? (*Lösung: 10 010,26 GE*)

c) Statt wie ursprünglich vereinbart werden vorerst keine Zahlungen geleistet, erst ab Beginn des vierten Jahres werden vorschüssige Raten zu 6 000 GE gezahlt.

   1. Wie viele Jahre lang müssen volle Raten gezahlt werden? (*Lösung: n=5,5 d.h. fünf Jahre lang*)
   2. Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach der letzten vollen Rate? (*Lösung: 2 757,90 GE*)

Aufgabe 7.3
Bei 8% Jahreszins bestehen folgende Zahlungsverpflichtungen:

- 5 000 Euro am 31.12.2010
- 6 000 Euro am 31.12.2013

Rückzahlungsalternativen

a) sechsjährige jährliche Rente, erster Betrag fällig am 01.01.2012
Wie hoch ist die Rente?
(*Lösung:* $r' = 2\,111{,}89$ *Euro*)

b) zwei gleich große Beträge am 31.12.2010 und am 31.12.2013
Wie hoch sind die beiden Beträge?
(*Lösung: 5 442,53 Euro*)

c) vierjährige jährliche Rente über 2 000 Euro, erster Betrag fällig am 01.01.2013 und Restbetrag fällig am 01.01.2021
Wie hoch ist die Restzahlung am 01.01.2021?
(*Lösung: 7 835,65 Euro Restbetrag*)

d) ein Rückzahlungsbetrag am 31.12.2013 und ein doppelt so großer Rückzahlungsbetrag am 31.12.2015
Wie hoch sind die beiden Beträge?
(*Lösung: 4 530,39 Euro am 31.12.2013 und 9 060,78 Euro am 31.12.2015*)

Aufgabe 7.4
Ein Pensionär legt den Erlös aus einem Grundstücksverkauf Ende 2000 zu 8% Zinsen p.a. auf ein Sparkonto an. Er könnte mit dem Betrag vom Jahr 2003 einschließlich bis zum Jahr 2025 einschließlich jeweils zu Beginn eines Jahres 50 000 GE abheben.

a) Wie hoch ist der Erlös aus dem Grundstücksverkauf am 01.01.2001? (*Lösung: 480 141,62 GE*)

b) Zum Ende des Jahres 2010 muss der Pensionär von diesem Sparkonto zusätzlich 150 000 GE abheben. Dafür entfallen die Abhebungen der Jahre 2012 bis 2015 einschließlich.
Wie hoch sind in diesem Falle die Abhebungen der Jahre 2016 bis 2025? (*Lösung: 53 164,23 GE*)

Lösung zu Aufgabe 7.1

a) $n = \dfrac{\ln\left[1 + \frac{8\,000}{1\,000 \cdot 1{,}04} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 6{,}8$

d.h. nach sieben Jahren wird erstmals das Guthaben von 8 000 GE überschritten.

b) $K_{20} = 1\,000 \cdot 1{,}04 \dfrac{1{,}04^{20} - 1}{0{,}04} - 3\,000 \cdot 1{,}04^{15} + 2\,000 \cdot 1{,}04^{3} = 27\,816{,}10$

d.h. das Guthaben beträgt 27 816,10 GE.

Lösung zu Aufgabe 7.2

a) $R_0 = 6\,000 \cdot \dfrac{1{,}04^{5} - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{5}} = 26\,710{,}93$

d.h. der Kaufpreis der Maschine beträgt 26 710,93 GE.

b) Barwert der Rente:

$R'_0 = 26\,710{,}93 \cdot 1{,}04^{2} = 28\,890{,}54$

$28\,890{,}54 = r' \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{3} - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{3}} \Leftrightarrow r' = 10\,010{,}26$

d.h. die Raten betragen jeweils 10 010,26 GE.

c) $R'_0 = 26\,710{,}93 \cdot 1{,}04^{3} = 30\,046{,}16$

1. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{30\,046{,}16}{6\,000 \cdot 1{,}04} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 5{,}4548$

   d.h. es sind fünf volle Raten zu bezahlen.

2. $K_5 = 30\,046{,}16 \cdot 1{,}04^{5} - 6\,000 \cdot 1{,}04 \cdot \dfrac{1{,}04^{5} - 1}{0{,}04} = 2\,757{,}90$

   d.h. die Restzahlung genau acht Jahre nach Kauf der Maschine beträgt 2 757,90 GE.

Lösung zu Aufgabe 7.3

a) $R'_0 = 5\,000 \cdot 1{,}08 + \dfrac{6\,000}{1{,}08^{2}} = 10\,544{,}03$

$10\,544{,}03 = r' \cdot 1{,}08 \cdot \dfrac{1{,}08^{6} - 1}{0{,}08} \cdot \dfrac{1}{1{,}08^{6}} \Leftrightarrow r' = 2\,111{,}89$

d.h. die Rente beträgt 2 111,89 Euro.

b) *1. Lösungsweg:*

$x + \dfrac{x}{1{,}08^{3}} = \dfrac{10\,544{,}03}{1{,}08}$

$x + \dfrac{1}{1{,}08^{3}} \cdot x = 9\,762{,}991$

$x + 0{,}7938322 \cdot x = 9\,762{,}991$

$1{,}7938322 \cdot x = 9\,762{,}991 \Leftrightarrow x = 5\,442{,}53$
d.h. die beiden Beträge betragen jeweils 5 442,53 Euro.
2. Lösungsweg:
$5\,000 \cdot 1{,}08^3 + 6\,000 = 12\,298{,}56$
$12\,298{,}56 = x \cdot 1{,}08^3 + x = 1{,}259712 \cdot x + 1 \cdot x = 2{,}259712 \cdot x$
$$x = \frac{12\,298{,}56}{2{,}259712} = 5\,442{,}53$$

c) *1. Lösungsweg:*
Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.12.2016:
$5\,000 \cdot 1{,}08^6 + 6\,000 \cdot 1{,}08^3 = 15\,492{,}64$
Wert der jährlichen Rückzahlungen von 2 000 Euro über 4 Jahre am 31.12.2016:
$$R_4' = 2\,000 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08} = 9\,733{,}20$$
Schuldenstand am 31.12.2016 = Schulden minus Rückzahlungen:
$15\,492{,}64 - 9\,733{,}20 = 5\,759{,}44$ Restschulden
Restzahlung am 01.01.2021:
$5\,759{,}44 \cdot 1{,}08^4 = 7\,835{,}65$
d.h. die Restzahlung beträgt 7 835,65 Euro.
2. Lösungsweg:
Schuldenstand am 31.12.2016:
$$10\,544{,}03 \cdot 1{,}08^5 - 2\,000 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08} = 5\,759{,}44 \text{ Schulden}$$
Restzahlung am 01.01.2021:
$x = 5\,759{,}44 \cdot 1{,}08^4 = 7\,835{,}65$
d.h. die Restzahlung beträgt 7 835,65 Euro.

d) Wertstellung am 31.12.2015:
$$\begin{aligned} \text{Schulden} &= \text{Rückzahlungen} \\ 10\,544{,}03 \cdot 1{,}08^4 &= x \cdot 1{,}08^2 + 2x \\ 14\,345{,}04 &= 3{,}1664x \\ x &= 4\,530{,}39 \\ 2x &= 9\,060{,}78 \end{aligned}$$
d.h. die beiden Beträge lauten 4 530,39 Euro und 9 060,78 Euro.

Lösung zu Aufgabe 7.4

a) $x \cdot 1{,}08^{25} = 50\,000 \cdot 1{,}08 \cdot \dfrac{1{,}08^{23} - 1}{0{,}08} \Leftrightarrow x = 480\,141{,}62$
d.h. der Erlös aus dem Grundstücksverkauf beträgt 480 141,62 GE.

b) Rentenendwert der Auszahlungen im Zeitraum 2003 bis 2011:
$$R_n' = 50\,000 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^9 - 1}{0{,}08} = 674\,328{,}12$$

Guthaben am 31.12.2011:
$480\,141{,}62 \cdot 1{,}08^{11} - 674\,328{,}12 - 150\,000 \cdot 1{,}08 = 283\,188{,}83$
Barwert der Auszahlungen im Zeitraum 2016 bis 2025:
$283\,188{,}83 \cdot 1{,}08^{4} = 385\,275{,}236$
$385\,275{,}236 = r' \cdot 1{,}08 \cdot \dfrac{1{,}08^{10} - 1}{0{,}08} \cdot \dfrac{1}{1{,}08^{10}} \Leftrightarrow r' = 53\,164{,}23$