Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Unterjährige Renten

Aufgabe 8.1
Ein Auto wird auf Leasingbasis zu folgenden Bedingungen erworben:

- Sofortzahlung von 5 000 GE
- drei Jahre lang monatliche Raten (zahlbar jeweils am Monatsende) in Höhe von 340 GE
- nach drei Jahren Kauf zum Restwert von 6 000 GE

Kommt der Käufer bei dem vorliegenden Leasingangebot und einem Kalkulationszins von 7% p.a. günstiger, als wenn er sofort den Neupreis in Höhe von 21 000 GE zahlen würde? (*Lösung:* Barwert des Leasingmodells 20 948,52 GE)

Aufgabe 8.2
Ein Unternehmen hat eine Maschine für fünf Jahre vermietet. Als Mietzahlungen erhält es zwei Jahre lang vierteljährlich vorschüssige Beträge in Höhe von 1 000 GE; für den Rest der Mietzeit hingegen werden dem Unternehmen nachschüssig 800 GE je Halbjahr bezahlt.
Welcher Betrag steht dem Unternehmen am Ende der Mietzeit zur Verfügung, wenn sämtliche Mieteinnahmen auf Zinseszinsen zu 7% p.a. angelegt werden können? (*Lösung:* Guthaben am Ende der Mietzeit 15 820,99 GE)

Aufgabe 8.3
Durch jeweils am Jahresanfang geleistete Einzahlungen von 8 800 GE spart ein selbstständiger Geschäftsmann über 18 Jahre ein Kapital an, das er dann zunächst ruhen lässt. Vier Jahre nach der letzten Einzahlung will er zu Beginn eines jeden Monats Beträge abheben und zwar 14 Jahre lang.

a) Wie hoch sind die monatlichen Abhebungen, wenn für den gesamten Sparvorgang ein jährlicher Zins von 6,5 % gewährt wird? (*Lösung:* 3 276,74 GE)

b) Wie hoch müssen zwei gleich große Einzahlungen zwei bzw. drei Jahre nach der letzten Einzahlung sein, damit die monatlich vorschüssigen Abhebbungen im oben genannten Zeitraum von 14 Jahren genau 3 500 GE betragen? Der Zins sei wiederum 6,5 % p.a. (*Lösung:* 11 367,34 GE)

Aufgabe 8.4
Eine vier-jährige vorschüssige monatliche Rente über 2 000 GE soll bei 4% Zins p.a. umgewandelt werden in

a) eine drei-jährige nachschüssige monatliche Rente mit demselben Barwert (*Lösung:* 2 624,62 GE)

b) zwei gleich große Zahlungen jetzt und in fünf Jahren (*Lösung:* 48 852,14 GE)

c) eine fünf-jährige vorschüssige vierteljährliche Rente (*Lösung:* 4 876,33 GE)

Berechnen Sie die Höhe der jeweiligen Zahlungen.

Aufgabe 8.5
Durch monatlich nachschüssig eingezahlte Beträge von 350 GE möchte jemand seine Pension aufbessern. Er leistet Einzahlungen ab dem Jahr 2000 bis einschließlich 2008 bei einem Zins von 3,75% p.a. Am 31.12.2007 zahlt er zusätzlich eine erhaltene Treueprämie von 16 000 auf dieses Konto ein.

a) Welchen Betrag kann er ab Januar 2009 jeweils zu Beginn eines Monats über einen Zeitraum von 15 Jahren abheben? (*Lösung:* 442,84 GE)

b) Unerwartet muss er am 01.01.2009 einen Betrag abheben, der die geplanten monatlichen Abhebungen auf 395,92 GE reduziert. Wie hoch ist der entnommene Betrag? (*Lösung:* 6 499,84 GE)

Aufgabe 8.6
Am 01.01.2012 wird ein Kredit in Höhe von 12 000 Euro zu 4% Jahreszinsen aufgenommen. Die Rückzahlung des Kredits soll binnen fünf Jahren mit vorschüssigen Monatsraten erfolgen, die erste Rate ist fällig zum Zeitpunkt der Kreditaufnahme. Wie hoch sind die Monatsraten? (*Lösung: 219,86 Euro*)

Aufgabe 8.7
Aus einer zehnjährigen Ansparung für eine Ausbildung - nachschüssige jährliche Einzahlung von 4 800 GE - wird eine zwölfjährige Rente bezogen, die vierteljährlich ausgezahlt wird. Die Auszahlung der ersten Quartalsrate erfolgt genau ein Jahr nach der letzten Einzahlung. Der Zinssatz beträgt 4,25% p.a.

a) Wie hoch sind die vierteljährigen Auszahlungsraten? (*Lösung: 1 600,12 GE*)

b) Welche vorschüssigen monatlichen Einzahlungen hätten bei der zehnjährigen Sparaktion die gleichen Auszahlungsbeträge erbracht? (*Lösung: 391 GE*)

c) Über welchen Zeitraum könnte man aus der angesparten Summe anstelle der obigen Quartalsrente eine vorschüssige Jahresrente von 4 500 GE beziehen, deren erste Auszahlung ebenfalls genau ein Jahr nach der letzten Einzahlung erfolgt? (*Lösung: 19 Jahre*)

Lösung zu Aufgabe 8.1

$r_J = 340 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}07) = 4\,210{,}90$

$K_0 = 5\,000 + 4\,210{,}9 \cdot \dfrac{1{,}07^3 - 1}{0{,}07} \cdot \dfrac{1}{1{,}07^3} + \dfrac{6\,000}{1{,}07^3} = 20\,948{,}52$

d.h. das Leasing-Modell ist etwas günstiger als der Barkauf.

Lösung zu Aufgabe 8.2

$r_J = 1\,000 \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}07) = 4\,175$

$R_2 = 4\,175 \cdot \dfrac{1{,}07^2 - 1}{0{,}07} = 8\,642{,}25$

$r_J = 800 \cdot (2 + 0{,}5 \cdot 0{,}07) = 1\,628$

$R_3 = 1\,628 \cdot \dfrac{1{,}07^3 - 1}{0{,}07} = 5\,233{,}86$

$K_5 = 8\,642{,}25 \cdot 1{,}07^3 + 5\,233{,}86 = 15\,820{,}99$

d.h. am Ende der Mietzeit stehen 15 820,99 GE zur Verfügung.

Lösung zu Aufgabe 8.3

a) $R'_{18} = 8\,800 \cdot 1{,}065 \cdot \dfrac{1{,}065^{18} - 1}{0{,}065} = 303\,747{,}15$

$K_{21} = 303\,747{,}15 \cdot 1{,}065^3 = 366\,911{,}26$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$366\,911{,}26 = r_J \cdot \dfrac{1{,}065^{14} - 1}{0{,}065} \cdot \dfrac{1}{1{,}065^{14}} \Leftrightarrow r_J = 40\,705{,}31$

$40\,705{,}31 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) \Leftrightarrow r'_M = 3\,276{,}74$

d.h die vorschüssigen monatlichen Auszahlungen betragen 3 276,74 GE.

b) $R_0 = 3\,500(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) \cdot \dfrac{1{,}065^{14} - 1}{0{,}065} \cdot \dfrac{1}{1{,}065^{14}} = 391\,910{,}60$

$366\,911{,}26 + x \cdot 1{,}065^2 + x \cdot 1{,}065 = 391\,910{,}6 \Leftrightarrow x = 11\,367{,}34$

d.h. die beiden Einzahlungen müssen jeweils 11 367,34 GE betragen.

Lösung zu Aufgabe 8.4

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$r_J = 2\,000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 24\,520$

Barwert:

$R_0 = 24\,520 \cdot \dfrac{1{,}04^4 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^4} = 89\,005{,}03$

a) $89\,005{,}03 = r_J \cdot \dfrac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^3} \Leftrightarrow r_J = 32\,072{,}83$

$32\,072{,}83 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \Leftrightarrow r_M = 2\,624{,}62$

d.h. die Monatsraten betragen 2 624,62 Euro.

b) $89\,005{,}03 = x + \dfrac{x}{1{,}04^5} = 1{,}8219 \cdot x \Leftrightarrow x = 48\,852{,}14$

d.h. die beiden gleich hohen Zahlungen betragen 48 852,14 Euro.

c) $89\,005{,}03 = r_J \cdot \dfrac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^5} \Leftrightarrow r_J = 19\,992{,}94$

$19\,992{,}94 = r'_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) \Leftrightarrow r'_Q = 4\,876{,}33$

Lösung zu Aufgabe 8.5

a) Der Zeitraum vom 01.01.2000 bis 31.12.2008 beträgt 9 Jahre

$$r_{jährlich} = 350\,(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0375) = 4\,272{,}1875$$

$$R_9 = 4\,272{,}1875 \cdot \frac{1{,}0375^9 - 1}{0{,}0375} = 44\,751{,}271$$

$$K_9 = R_9 + 16\,000 \cdot 1{,}0375 = 44\,751{,}271 + 16\,600 = 61\,351{,}27$$

$$r_{jährlich} = 61\,351{,}27 \cdot 1{,}0375^{15} \cdot \frac{0{,}0375}{1{,}0375^{15} - 1} = 5\,421{,}9766$$

$$5\,421{,}9766 = r_{monatlich} \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0375) \quad \Rightarrow \quad r_{monatlich} = 442{,}84$$

b) $r_{jährlich} = 395{,}92\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0375) = 4\,847{,}5455$

$$x = 61\,351{,}27 - 4\,847{,}5455 \cdot \frac{1{,}0375^{15} - 1}{0{,}0375} \cdot \frac{1}{1{,}0375^{15}} = 61\,351{,}27 - 54\,851{,}4316 = 6\,499{,}84$$

Lösung zu Aufgabe 8.6

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:

$$12\,000 = r_J \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5} \Leftrightarrow r_J = 2\,695{,}525$$

Vorschüssige Monatsrate r'_M:

$$2\,695{,}525 = r'_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \Leftrightarrow r'_M = 219{,}86$$

d.h. die Monatraten betragen 219,86 Euro.

Lösung zu Aufgabe 8.7

$$R_{10} = 4\,800 \cdot \frac{1{,}0425^{10} - 1}{0{,}0425} = 58\,301{,}87$$

$$58\,301{,}87 \cdot 1{,}0425 = 60\,779{,}70$$

a) $60\,779{,}70 = r_J \cdot \dfrac{1{,}0425^{12} - 1}{0{,}0425} \cdot \dfrac{1}{1{,}0425^{12}} \Leftrightarrow r_J = 6\,570{,}50$

$6\,570{,}50 = r_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}0425) \Leftrightarrow r_Q = 1\,600{,}12$

d.h. die Quartalsraten betragen 1 600,12 GE.

b) $4\,800 = r'_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}0425) \Leftrightarrow r'_M = 391$

d.h. die Monatsraten würden 391 GE betragen.

c) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{60\,779{,}70}{4\,500 \cdot 1{,}0425} \cdot 0{,}0425\right]}{\ln 1{,}0425} = 19{,}22$

d.h. 19 Jahre lang.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Rentenrechnung Arbeitsblatt

Aufgabe 1

Bei 6,5% Jahreszins hat ein Schuldner die folgenden Zahlungsverpflichtungen:

- 5 000 Euro am 01.01.2010
- 6 000 Euro am 01.01.2012
- 12 000 Euro am 01.01.2015

a) Mit welcher Einmalzahlung können die Schulden am 01.01.2011 zurückgezahlt werden? (*Lösung: 20 286,68 Euro*)

b) Wann kann die Schuld mit einer einzigen Zahlung in Höhe des Nennwerts (5 000 + 6 000 + 12 000 = 23 000 Euro) der Schulden zurückgezahlt werden? (*Lösung: am 01.01.2013*)

c) Die Schulden sollen ab 01.01.2016 durch vorschüssige Quartalsraten über fünf Jahre zurückgezahlt werden. Wie hoch sind die Quartalsraten? (*Lösung: 1 606,80 Euro*)

d) Die Schulden sollen ab 01.01.2016 durch vorschüssige Quartalsraten in Höhe von 1 000 Euro zurückgezahlt werden. In welchem Jahr muss die letzte volle Quartalsrate gezahlt werden? (*Lösung: letzte volle Quartalsrate am 01.10.2024*)

Aufgabe 2

Aus einer Einzahlung auf ein Konto zu 3% Jahreszinsen am 31.12.2010 soll in den Jahren 2015, 2016, 2017, 2018 jeweils am Ende eines Monats 1 000 Euro abgehoben werden.

a) Wie hoch muss die Einzahlung am 31.12.2010 sein? (*Lösung: 40 176,05 Euro*)

b) Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2016? (*Lösung: 23 277,36 Euro*)

c) Am 31.12.2016 müssen unvorhergesehener Weise aus dem mittlerweile angesparten Guthaben zusätzlich 5 000 Euro entnommen werden. Auf welchen Betrag reduzieren sich die anschließenden monatlich nachschüssig gleich hohen Entnahmen in den Jahren 2017 und 2018? (*Lösung: 785,20 Euro*)

Lösung zu Aufgabe 1:

siehe *https://th-koeln.arrenberg.com/pdf/a_Arbeitsblatt_unterj_Renten.pdf*

Lösung zu Aufgabe 2:

nachschüssige Jahresersatzrente r_J:

$r_J = 1\,000 \cdot (12 + \dfrac{11}{2} \cdot 0{,}03) = 12\,165$

Barwert R_0 der Auszahlungen am 01.01.2015:

$R_0 = 12\,164 \cdot \dfrac{1{,}03^4 - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^4} = 45\,218{,}5$

a) $\dfrac{R_0}{q^4} = 40\,176{,}05$

b) $R_0 \cdot q^2 - R_2 = 45\,218, \cdot 1{,}03^2 - 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^2-1}{0{,}03} = 23\,277{,}36$

c) Barwert der neuen Rente am 01.01.2017:
   $R_0 = 23\,277{,}36 - 5\,000 = 18\,277{,}36$
   nachschüssige Jahresersatzrente r_J:
   $18\,277{,}36 = r_J \cdot \dfrac{1{,}03^2 - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^2} \Leftrightarrow r_J = \dfrac{18\,277{,}36}{1{,}91347} = 9\,551{,}946$
   monatlich nachschüssige Rente r_U:
   $9\,551{,}946 = r_U(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}03) \Leftrightarrow r_U = \dfrac{9\,551{,}946}{12{,}165} = 785{,}199$

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Unterjährige Renten zu unterjähriger Verzinsung zum relativen Zins
(**nicht klausurrelevant**)

Aufgabe 1:
Ein Leasing-Fahrzeug wird zu folgenden Konditionen finanziert:

- Kaufpreis (Finanzierungswert) 350 000 Euro
- Nominalzins 3,8 % p.a. bei unterjähriger Verzinsung zum relativen Zins
- erste Teil-Rückzahlung in Höhe von 30 000 Euro im 7. Monat
- zweite Teil-Rückzahlung in Höhe von 40 000 Euro im 13. Monat
- monatliche Rückzahlungen über 17 Monate
- Restzahlung in Höhe von 50 000 Euro am Ende des 17. Monats

Berechnen Sie die monatlichen Rückzahlungen, wenn diese

(a) jeweils am Monatsende, also nachschüssig erfolgen und die beiden Teil-Rückzahlungen ebenfalls jeweils am Monatsende des angegebenen Monats fällig sind.

(b) jeweils am Monatsanfang, also vorschüssig erfolgen und die beiden Teil-Rückzahlungen ebenfalls jeweils am Monatsanfang des angegebenen Monats fällig sind.

Lösung:
Tag der Wertstellung aller Beträge = Tag des Leasing-Kaufs

(a) r_M = monatlich nachschüssige Rückzahlungen über 17 Monate mit dem Rentenbarwert:

$$R_0 = r_M \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{17}-1}{\frac{0{,}038}{12}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{17}} = 16{,}52507 \cdot r_M$$

Barwert der beiden Teil-Rückzahlungen:

$$\frac{30\,000}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{7}} + \frac{40\,000}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{13}} = 29\,343{,}34 + 38\,389{,}26 = 67\,732{,}61$$

Barwert der Restzahlung:

$$\frac{50\,000}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{17}} = 47\,383{,}53$$

Die Monatsrente wird aus der folgenden Gleichung „Schulden = Rückzahlungen“ berechnet:

$350\,000 = 16{,}52507 \cdot r_M + 67\,732{,}61 + 47\,383{,}53$

Das ergibt:

$234\,883{,}86 = 16{,}52507 \cdot r_M$

Division durch 16,52507 ergibt:

$r_M = 14\,213{,}79$

d.h. die monatlich nachschüssigen Zahlungen betragen 14 213,79 Euro.

(b) r'_M = monatlich vorschüssige Rückzahlungen über 17 Monate mit dem Rentenbarwert:

$$R'_0 = r_M \cdot \left(1 + \frac{0{,}038}{12}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{17} - 1}{\frac{0{,}038}{12}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{17}} = 16{,}57739 \cdot r'_M$$

Barwert der beiden Teil-Rückzahlungen:

$$\frac{30\,000}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{6}} + \frac{40\,000}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{12}} = 29\,436{,}26 + 38\,510{,}83 = 67\,947{,}09$$

Barwert der Restzahlung:

$$\frac{50\,000}{\left(1+\frac{0{,}038}{12}\right)^{17}} = 47\,383{,}53$$

Die Monatsrente wird aus der folgenden Gleichung „Schulden = Rückzahlungen“ berechnet:

$350\,000 = 16{,}57739 \cdot r'_M + 67\,947{,}09 + 47\,383{,}53$

Das ergibt:

$234\,669{,}37 = 16{,}57739 \cdot r'_M$

Division durch 16,57739 ergibt:

$r'_M = 14\,155{,}99$

d.h. die monatlich vorschüssigen Zahlungen betragen 14 155,99 Euro.

Aufgabe 2:
Über 28 Jahre soll bei monatlicher Verzinsung zum relativen Zins zu nominell 6,4 % p.a. eine monatlich nachschüssige Rente in Höhe von 499 Euro mit einer jährlichen Steigerung von 2 % ausgezahlt werden.

a) Wie hoch ist der Barwert dieser Rente?

b) Wie hohe monatlich nachschüssige gleich hohe Einzahlungen über 27 Jahre sind nötig, um auf den Barwert aus Teilaufgabe a) anzusparen?

Lösung:

a) Im ersten Jahr beträgt die Monatsrente 499 Euro, im zweiten Jahr $499 \cdot 1{,}02$ Euro, im dritten Jahr $499 \cdot 1{,}02^2$ usw. im letzten Jahr $499 \cdot 1{,}02^{27}$. Somit ergibt sich folgender Barwert:

$$\begin{aligned}
K_0 &= 499 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{12}-1}{\frac{0{,}064}{12}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{12}} \\
&\quad +499 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{12}-1}{\frac{0{,}064}{12}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{24}} \\
&\quad +499 \cdot 1{,}02^2 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{12}-1}{\frac{0{,}064}{12}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{36}} \\
&\quad \vdots \\
&\quad +499 \cdot 1{,}02^{27} \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{12}-1}{\frac{0{,}064}{12}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{12\cdot 28}} \\
&= 95\,168{,}08
\end{aligned}$$

d.h. der Barwert beträgt 95 168,08 Euro.

b) r_u = monatlich nachschüssige Einzahlungen

$$95\,168{,}08 = r_u \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{27\cdot 12}-1}{\frac{0{,}064}{12}}$$

$$\Leftrightarrow r_u = \frac{95\,168{,}08 \cdot \frac{0{,}064}{12}}{\left(1+\frac{0{,}064}{12}\right)^{324}-1} = 110{,}25$$

d.h. die monatlichen Einzahlungen betragen 110,25 Euro.