QM III-Klausur 30.01.2019

Aufgabe 1

An der Technischen Hochschule Köln wurde im Wintersemester 2017/2018 eine Untersuchung des monatlichen Einkommens von Studierenden durchgeführt. Bei dieser Untersuchung konnte davon ausgegangen werden, dass das monatliche Einkommen der Studierenden normalverteilt ist mit einer theoretischen Standardabweichung von 50 Euro.

1. Auf Basis einer Stichprobe vom Umfang 25 wurde ein konkretes 95 %-Konfidenzintervall für das mittlere monatliche Einkommen bestimmt. Für dieses Intervall beträgt die untere Grenze 790,4 Euro und die obere Grenze 829,6 Euro.
   a) Wird das Konfidenzniveau auf 99% erhöht, wie verändert sich dann die Breite des obigen Intervalls? Geben Sie die neuen Intervallgrenzen an!
   b) Wie wirkt sich sich eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs auf die Breite des obigen Konfidenzintervalls zum Niveau 95% aus? Geben Sie auch hier die neuen Intervallgrenzen an, wenn der Wert des arithmetischen Mittels unverändert geblieben ist!
2. Wie viele Studierende sind mindestens zu befragen, wenn für ein Konfidenzintervall zum Niveau 90 % eine maximale Intervallbreite von 20 Euro erreicht werden soll?

Aufgabe 2

Im Jahr 2017 hat ein volljähriger Verbraucher in der BRD im Mittel 265 Euro für Weihnachtsgeschenke ausgegeben. Bitte überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ anhand der nachfolgenden Stichprobe, ob sich die mittleren Ausgaben eines volljährigen Verbrauchers in der BRD im Jahr 2018 gegenüber dem Jahr 2017 signifikant verändert haben.

Eine Umfrage kurz vor Weihnachten im Jahr 2018 ergab folgende Werte:

i	x_i	x_i^2
1	273	74 529
2	281	78 961
3	276	76 176
$\vdots$		
30	281	78 961
$\sum$	8 405	2 357 021

Gehen Sie dabei bitte wie folgt vor:

1. Wie heißt der Test?
2. Wie lautet die Nullhypothese des Tests?
3. Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.
4. Berechnen Sie den p-Wert des Tests.

5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.
6. Interpretieren Sie den Fehler 1. Art.
7. Führen Sie ggf. einen einseitigen Test zum Niveau 0,05 durch und interpretieren Sie die Testentscheidung.

Lösung zu Aufgabe 1:

1. $n = 25$
   $\overline{x} =?$
   1. Lösungsweg:
   $\overline{x} = \text{Klassenmitte} = (\text{Untergrenze} + \text{Obergrenze})/2 = \dfrac{790{,}4 + 829{,}6}{2} = 810$
   2. Lösungsweg:
   Breite = Obergrenze minus Untergrenze $= 829{,}6 - 790{,}4 = 39{,}2$
   ϵ = halbe Breite $= 39{,}2 \div 2 = 19{,}6$
   $\overline{x}$ = Obergrenze minus $\epsilon = 829{,}6 - 19{,}6 = 810$
   bzw. $\overline{x}$ = Untergrenze plus $\epsilon = 790{,}4 + 19{,}6 = 810$
   3. Lösungsweg:
   $790{,}4 = \overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{x} - 1{,}96 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow \overline{x} = 790{,}4 + 1{,}96 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{25}} = 810$
   4. Lösungsweg:
   $829{,}6 = \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{x} + 1{,}96 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow \overline{x} = 829{,}6 - 1{,}96 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{25}} = 810$
   a) Durch die Erhöhung des Konfidenzniveaus auf 99% vergrößert sich die Intervallbreite wegen
   $$\left[\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[810 - 2{,}5758\frac{50}{\sqrt{25}}; 810 + 2{,}5758\frac{50}{\sqrt{25}}\right] = [784{,}24\,;\,835{,}76]$$
   von ursprünglichen $829{,}6 - 790{,}4 = 39{,}2$ Euro auf $835{,}76 - 784{,}24 = 51{,}52$ Euro.
   b) Die neue Intervallbreite beträgt mit $\frac{39{,}2}{2} = 19{,}6$ Euro genau die Hälfte der ursprünglichen Intervallbreite. Das neue konkrete Konfidentzintervall lautet:
   $$\left[\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[810 - 1,96\frac{50}{\sqrt{100}}; 810 + 1,96\frac{50}{\sqrt{100}}\right] = [800{,}2\,;\,819{,}8]$$
2. Für die Bestimmung des Mindeststichprobenumfangs ist die Ungleichung
   $$n \geq \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma^2}{\epsilon^2}$$
   mit $\epsilon = 10$, $\sigma = 50$ und $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}6449$ zu lösen.
   $$n \geq \frac{1{,}6449^2 \cdot 50^2}{10^2} = 67{,}64$$
   Damit ergibt sich als Mindeststichprobenumfang $n \geq 67{,}64$. Somit sind mindestens $n = 68$ Studierende zu befragen.

Lösung zu Aufgabe 2:
$X =$ Ausgaben (in Euro) für Weihnachtsgeschenke eines volljährigen Verbrauchers
$n = 30$
$\overline{x} = \dfrac{8\,405}{30} = 280{,}1\overline{6}$
$s^2 = \dfrac{2\,357\,021}{30} - 280{,}1\overline{6}^2 = 74{,}00\overline{5}$

1. Der Test heißt t-Test.

2. Die Nullhypothese lautet $H_0 : E[X] = 265$

3. Faustregel: $n = 30 \geq 30$ erfüllt.

4. p-Wert $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\dfrac{280{,}1\overline{6} - 265}{\sqrt{\frac{74{,}00\overline{5}}{30}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-9{,}7) \approx 2 \cdot 0 = 0$

5. p-Wert $\approx 0 \leq 0{,}05 = \alpha$
   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. die mittleren Ausgaben für Weihnachtsgeschenke eines volljährigen Verbrauchers unterscheiden sich im Jahr 2018 signifikant von denen im Jahr 2017.

6. Der Test behauptet fälschlicherweise, dass es Unterschiede bei den mittleren Ausgaben eines volljährigen Verbrauchers für Weihnachtsgeschenke im Jahr 2018 im Vergleich zum Vorjahr geben wÃ¼rde. D.h. der Test erkennt nicht, dass sich im Jahr 2018 die mittleren Ausgaben eines volljährigen Verbrauchers für Weihnachtsgeschenke gegenüber dem Vorjahr 2017 nicht geändert haben.

7. $\overline{x} = 280{,}1\overline{6} > 265 = \mu$
   $H_0 : E[X] \leq 265$ gegen $H_1 : E[X] > 265$
   p-Wert (einseitig) $= 0{,}5 \cdot p$-Wert (zweiseitig) ≈ 0
   d.h. Ablehnung von H_0; d.h. im Jahr 2018 gibt ein volljähriger Verbraucher im Mittel signifikant mehr Geld für Weihnachtsgeschenke aus als im Jahr 2017.