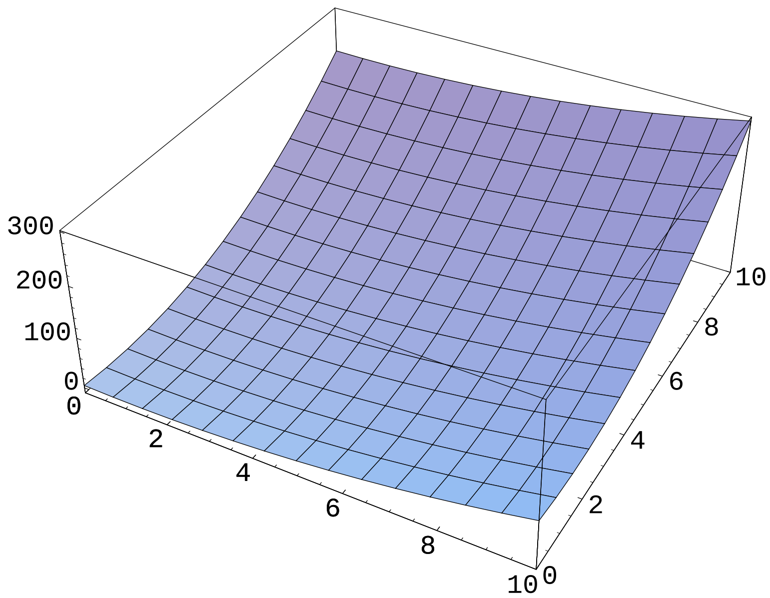
Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Extremwerte ohne Nebenbedingungen

Aufgabe 10.1
Bestimmen Sie die globale Minimalstelle der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 9y + 5 \quad ; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

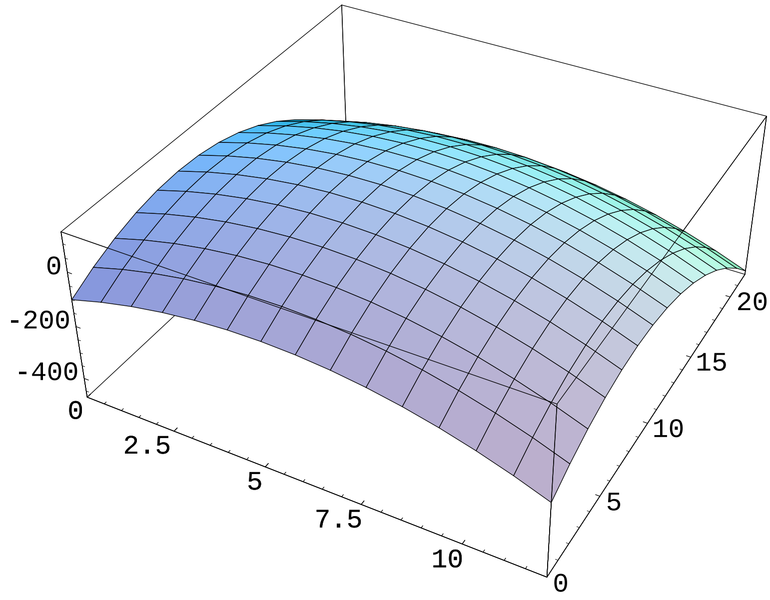


Aufgabe 10.2
Ein Monopolist biete zwei Produkte A und B an, für die folgende Preis-Absatz-Funktionen gelten:

$$p_A(x_A) = 48 - 4x_A \quad ; x_A \in [0;12]$$
$$p_B(x_B) = 44 - 2x_B \quad ; x_B \in [0;22]$$

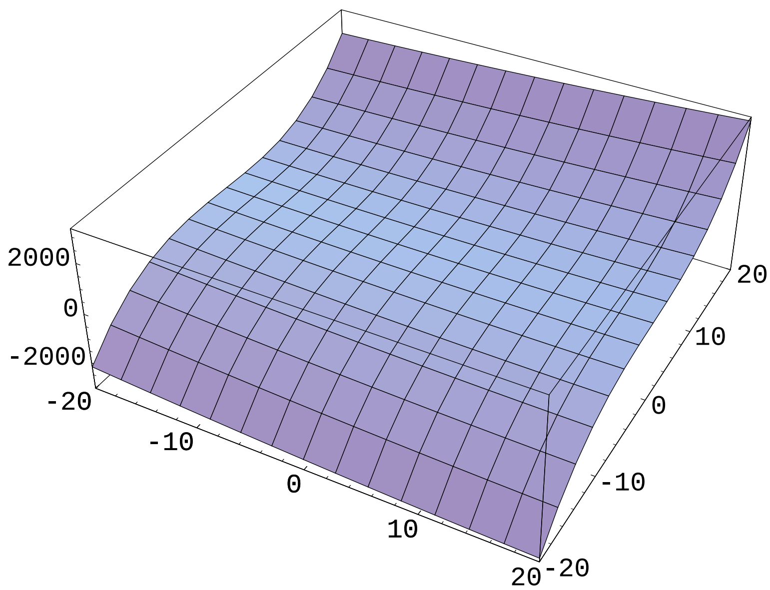
Die Herstellung beider Produkte erfolgt auf einer Produktionsanlage, deren fixe Kosten 100 Geldeinheiten (GE) betragen. An variablen Kosten verursacht A 8 GE/ME, B 12 GE/ME.

Ermitteln Sie für beide Güter die Gewinn-maximale Preis-Mengenkombination sowie den Gewinn.



Aufgabe 10.3
Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremwerte (notwendige und hinreichende Bedingungen)!

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 + x_1 x_2 + x_1 - x_2 \ \ ; D_f = \mathbb{R}^2$$



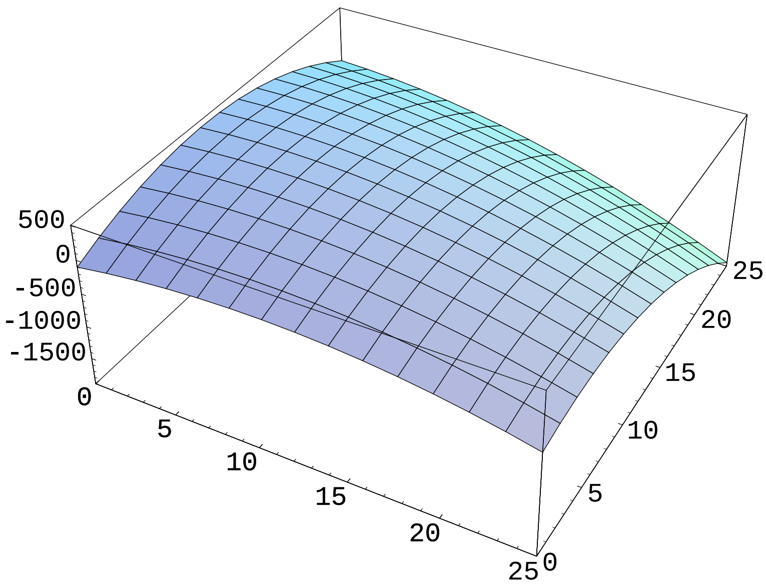
Aufgabe 10.4
Ein Monopolist verkauft zwei Produkte X_1,X_2 und hat die folgenden Preis-Absatz-Funktionen:

$$p_1(x_1, x_2) = 50 - 2x_1 \quad ; x_1 \in [0; 25], x_2 \in [0; 25]$$
$$p_2(x_1, x_2) = 100 - 4x_2 \quad ; x_1 \in [0; 25], x_2 \in [0; 25]$$

Dabei bezeichnen p_1 den Preis für eine ME des Produkts X_1 und p_2 den Preis für eine ME des Produkts X_2, ferner x_1 die Absatzmenge des Produkts X_1 und x_2 die Absatzmenge des Produkts X_2.
Die Gesamtkosten des Monopolisten betragen:

$$K(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2 + 2x_1x_2 + 100 \quad ; x_1 \in [0; 25], x_2 \in [0; 25]$$

Gesucht sind der Preis und die Menge für jedes Produkt, so dass ein maximaler Gewinn erreicht wird. Wie groß ist der Gewinn?

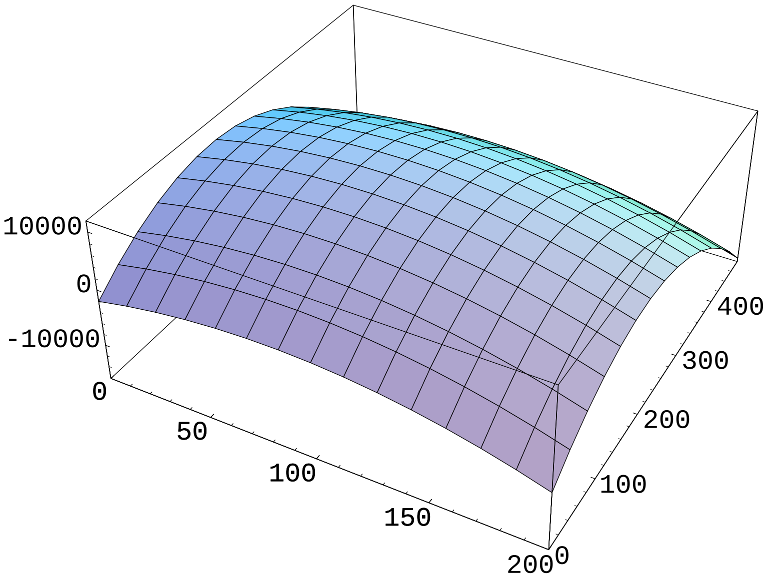


Aufgabe 10.5
Ein Unternehmen stellt einen CD-Player her, den es in den USA und in Deutschland verkauft. Seien x und y die Zahlen der wöchentlich in den USA bzw. in Deutschland abgesetzten Geräte. Die Verkaufspreise werden in jedem Land wie folgt bestimmt:

$$p_{USA} = (100 - \tfrac{x}{2}) \text{ Euro in den USA und } p_D = (120 - \tfrac{y}{4}) \text{ Euro in Deutschland.}$$

Für die Herstellung der CD-Player gilt: Die variablen Stückkosten sind konstant 20 Euro pro Stück und die Fixkosten betragen 2 000 Euro pro Woche.

a) Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(x, y)$ unter der Annahme auf, daß alle produzierten Geräte verkauft werden.



b) Ermitteln Sie die kritischen Punkte (stationäre Stellen) von G.

c) Zeigen Sie, daß es sich bei dem kritischen Punkt aus b) um ein Maximum handelt.

d) Wie groß ist der maximale Gewinn?

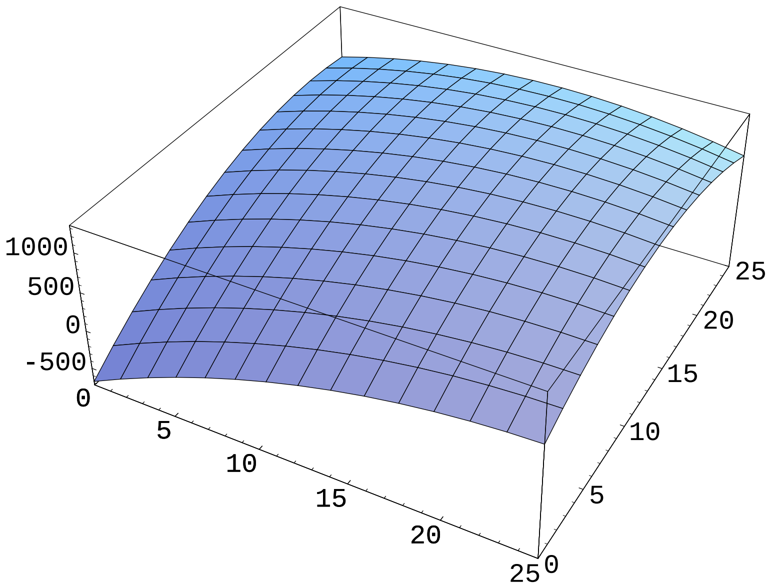
Aufgabe 10.6
Zwei Produzenten A_1 und A_2 bieten je ein Gut an. Zwischen den Absatzvariablen x_1, x_2 und den Preisvariablen p_1, p_2 gelten die Beziehungen:

$$x_1 = 100 - 2p_1 - p_2$$
$$x_2 = 120 - p_1 - 3p_2$$

Die Kosten sind gegeben durch:

$$K_1(x_1) = 120 + 2x_1$$
$$K_2(x_2) = 120 + 2x_2$$

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktionen G_1, G_2 beider Produzenten sowie die gemeinsame Gewinnfunktion $G = G_1 + G_2$ jeweils in Abhängigkeit von p_1, p_2.



b) Wie sind die Preise zu wählen, sodass der gemeinsame Gewinn G maximal wird? Geben Sie den maximalen Gewinn an.

c) Nach einem Streit setzt Produzent A_2 den Preis auf $p_2 = 16$. Wie hat dann A_1 den Preis p_1 zu wählen, damit G_1 maximal wird?

d) Ist es für die Käufer des von A_1 angebotenen Gutes von Vorteil, wenn der Konflikt zwischen A_1 und A_2 beigelegt wird?

Lösung zu Aufgabe 10.1

$f_x(x,y) = 2x - 2 \quad f_{xx}(x,y) = 2$
$f_y(x,y) = 6y - 9 \quad f_{yy}(x,y) = 6$
$\qquad\qquad\qquad\quad f_{xy}(x,y) = 0$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 0 & = & 2x-2 & \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{II} & 0 & = & 6y-9 & \Leftrightarrow y = 1{,}5 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x,y) = 2 \cdot 6 - 0^2 = 12 >_{\text{immer}} 0$
$f_{xx}(x,y) = 2 >_{\text{immer}} 0$
d.h. glob. Min in $x = 1$ und $y = 1{,}5$

Lösung zu Aufgabe 10.2

$U(x_A, x_B) = p_A \cdot x_A + p_B \cdot x_B = 48x_A - 4x_A^2 + 44x_B - 2x_B^2$
$K(x_A, x_B) = 8x_A + 12x_B + 100$
$G(x_A, x_B) = -4x_A^2 - 2x_B^2 + 40x_A + 32x_B - 100$

$G_{x_A}(x_A, x_B) = -8x_A + 40 \qquad G_{x_A x_A}(x_A, x_B) = -8$
$G_{x_B}(x_A, x_B) = -4x_B + 32 \qquad G_{x_B, x_B}(x_A, x_B) = -4$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad G_{x_A x_B}(x_A, x_B) = 0$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 0 & = & -8x_A+40 & \Leftrightarrow x_A = 5 \\ \text{II} & 0 & = & -4x_B+32 & \Leftrightarrow x_B = 8 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x_A, x_B) = (-8) \cdot (-4) - 0^2 = 32 >_{\text{immer}} 0$
$G_{x_A x_A}(x_A, x_B) = -8 <_{\text{immer}} 0$
d.h. glob. Max in (5;8)
Gewinn-maximale Mengen $x_A = 5$ ME und $x_B = 8$ ME
Gewinn-maximale Preise $p_A = 28$ GE und $p_B = 28$ GE
maximaler Gewinn $G(5;8) = 128$ GE

Lösung zu Aufgabe 10.3

$f_{x_1}(x_1, x_2) = 0{,}5x_1 + x_2 + 1 \quad f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = 0{,}5$
$f_{x_2}(x_1, x_2) = x_2^2 + x_1 - 1 \quad f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = 1$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lccl} \text{I} & 0 & = & 0{,}5x_1 + x_2 + 1 \\ \text{II} & 0 & = & x_1 + x_2^2 - 1 \\ \hline \text{II} - 2 \cdot \text{I} & 0 & = & x_2^2 - 2x_2 - 3 \\ & & & x_2 = 3 \text{ oder } x_2 = -1 \end{array}$$

1. Fall: $x_2 = 3 \Rightarrow \text{II } 0 = x_1 + 9 - 1 \Rightarrow x_1 = -8$
2. Fall: $x_2 = -1 \Rightarrow \text{II } 0 = x_1 + 1 - 1 \Rightarrow x_1 = 0$

d.h. $(0;-1)$ und $(-8;3)$ sind mögliche Extremstellen.
Hinreichende Bedingung:
$D(0;-1) = -2 < 0$; d.h. $(0;-1)$ Sattelstelle
$D(-8;3) = 2 > 0$ und $f_{x_1 x_1}(-8;3) = 0{,}5 > 0$
d.h. lokales Minimum in $(-8\,;\,3)$

Lösung zu Aufgabe 10.4
$U(x_1,x_2) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = (50x_1 - 2x_1^2) + (100x_2 - 4x_2^2)$
$G(x_1,x_2) = U(x_1,x_2) - K(x_1,x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_1x_2 + 40x_1 + 90x_2 - 100$

$$\begin{array}{ll} G_{x_1}(x_1,x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 40 & G_{x_1x_1}(x_1,x_2) = -4 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) = -8x_2 - 2x_1 + 90 & G_{x_2x_2}(x_1,x_2) = -8 \\ & G_{x_1,x_2}(x_1,x_2) = -2 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcrl} \text{I} & 0 & = & -4x_1 - 2x_2 + 40 & \\ \text{II} & 0 & = & -2x_1 - 8x_2 + 90 & \\ \hline 2\cdot\text{II} - \text{I} & 0 & = & -14x_2 + 140 & \Leftrightarrow x_2 = 10 \\ \text{II} & 0 & = & -4x_1 - 20 + 40 & \Leftrightarrow x_1 = 5 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x_1,x_2) = (-4)\cdot(-8) - (-2)^2 = 28 >_{\text{immer}} 0$
$G_{x_1x_1}(x_1,x_2) = -4 <_{\text{immer}} 0$
d.h. glob. Max in (5;10)
Gewinn-maximale Mengen $x_1 = 5$ ME und $x_2 = 10$ ME
Gewinn-maximale Preise $p_1 = 40$ GE und $p_2 = 60$ GE
maximaler Gewinn $G(5;10) = 450$ GE

Lösung zu Aufgabe 10.5

a) $K(x,y) = 20x + 20y + 2000$
$$U(x,y) = \left(100 - \frac{x}{2}\right)x + \left(120 - \frac{y}{4}\right)y = 100x - \frac{x^2}{2} + 120y - \frac{y^2}{4}$$
$$G(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 80x + 100y - 2000$$

b) Notwendige Bedingung:
$G_x(x,y) = -x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 80$
$G_y(x,y) = -0{,}5y + 100 \Leftrightarrow y = 200$
d.h. (80;200) stationärer Punkt

c) Hinreichende Bedingung:
$G_{xx}(x,y) = -1$
$G_{yy}(x,y) = -0{,}5$
$G_{xy}(x,y) = 0$
$D(x,y) = (-1)\cdot(-0{,}5) - 0^2 = 0{,}5 >_{\text{immer}} 0$

$G_{xx}(x,y) = -1 <_{\text{immer}} 0$
d.h. glob. Max in (80;200)

d) $G(80;200) = 11\,200$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 11 200 Euro.

Lösung zu Aufgabe 10.6

a) Kosten von Produzent A_1:
$K_1(p_1,p_2) = 120 + 2(100 - 2p_1 - p_2) = 320 - 4p_1 - 2p_2$
Kosten von Produzent A_2:
$K_2(p_1,p_2) = 120 + 2(120 - p_1 - 3p_2) = 360 - 2p_1 - 6p_2$
Umsatz von Produzent A_1:
$U_1(p_1,p_2) = p_1 \cdot x_1 = p_1 \cdot (100 - 2p_1 - p_2) = 100p_1 - 2p_1^2 - p_1p_2$
Umsatz von Produzent A_2:
$U_2(p_1,p_2) = p_2 \cdot x_2 = p_2 \cdot (120 - p_1 - 3p_2) = 120p_2 - p_1p_2 - 3p_2^2$
Gewinn von Produzent A_1:
$G_1(p_1,p_2) = U_1(p_1,p_2) - K_1(p_1,p_2) = -2p_1^2 - p_1p_2 + 104p_1 + 2p_2 - 320$
Gewinn von Produzent A_2:
$G_2(p_1,p_2) = U_2(p_1,p_2) - K_2(p_1,p_2) = -3p_2^2 - p_1p_2 + 126p_2 + 2p_1 - 360$
Gewinnsumme $G = G_1 + G_2$:
$G(p_1,p_2) = -2p_1^2 - 2p_1p_2 + 106p_1 - 3p_2^2 + 128p_2 - 680$

b) $G_{p_1}(p_1,p_2) = -4p_1 - 2p_2 + 106 \qquad G_{p1p1}(p_1,p_2) = -4$
$G_{p_2}(p_1,p_2) = -2p_1 - 6p_2 + 128 \qquad G_{p_2p_2}(p_1,p_2) = -6$
$G_{p_1p_2}(p_1,p_2) = -2$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lccll}
\text{I} & 0 & = & -4p_1 - 2p_2 + 106 & \\
\text{II} & 0 & = & -2p_1 - 6p_2 + 128 & \\
\hline
\text{I} - 2\cdot\text{II} & 0 & = & 10p_2 - 150 & \Rightarrow p_2 = 15 \\
\text{I} & 0 & = & -4p_1 - 30 + 106 & \Rightarrow p_1 = 19
\end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(p_1,p_2) = 24 - 4 = 20 >_{\text{immer}} 0$
$G_{p_1p_1}(p_1,p_2) = -4 <_{\text{immer}} 0$
d.h. (19;15) glob. Max
$G(19;15) = 1\,287$

c) $p_2 = 16$
$\Rightarrow x_1 = 100 - 2p_1 - 16 = 84 - 2p_1$
$U_1(p_1) = p_1 \cdot x_1 = p_1(84 - 2p_1) = 84p_1 - 2p_1^2$
$K_1(p_1) = 120 + 2(84 - 2p_1) = 288 - 4p_1$
$G_1(p_1) = U_1(p_1) - K_1(p_1) = 88p_1 - 2p_1^2 - 288$
$G_1'(p_1) = 88 - 4p_1$
$G_1''(p_1) = -4$

Notwendige Bedingung:
$0 = 88 - 4p_1 \Leftrightarrow p_1 = 22$
Hinreichende Bedingung:
$G_1''(p_1) = -4 <_{\text{immer}} 0$
d.h. glob. Max in $p_1 = 22$

d) ohne Konflikt: $p_1 = 19$, $p_2 = 15$
Mit Konflikt sind beide Preise höher und zwar: $p_1 = 22$, $p_2 = 16$
d.h. aus Sicht der Käufer sollte der Streit beigelegt werden

Extremstellen ohne Nebenbedingung	
Eigenschaft	Überprüfung
lok. Min in $(x_0; y_0)$	$f_x(x_0; y_0) = 0$ $f_y(x_0; y_0) = 0$ $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - (f_{xy}(x_0; y_0))^2 > 0$ $f_{xx}(x_0; y_0) > 0$
lok. Max in $(x_0; y_0)$	$f_x(x_0; y_0) = 0$ $f_y(x_0; y_0) = 0$ $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - (f_{xy}(x_0; y_0))^2 > 0$ $f_{xx}(x_0; y_0) < 0$
glob. Min in $(x_0; y_0)$	$f_x(x_0; y_0) = 0$ $f_y(x_0; y_0) = 0$ $f_{xx}(x; y) \cdot f_{yy}(x; y) - (f_{xy}(x; y))^2 > 0$ für alle $x, y \in \mathsf{D}_f$ $f_{xx}(x; y) > 0$ für alle $x, y \in \mathsf{D}_f$
glob. Max in $(x_0; y_0)$	$f_x(x_0; y_0) = 0$ $f_y(x_0; y_0) = 0$ $f_{xx}(x; y) \cdot f_{yy}(x; y) - (f_{xy}(x; y))^2 > 0$ für alle $x, y \in \mathsf{D}_f$ $f_{xx}(x; y) < 0$ für alle $x, y \in \mathsf{D}_f$
$(x_0; y_0)$ Sattelstelle	$f_x(x_0; y_0) = 0$ $f_y(x_0; y_0) = 0$ $f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - (f_{xy}(x_0; y_0))^2 < 0$