Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 3914
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Extremwerte unter Nebenbedingungen

Aufgabe 11.1 (schwer!)
An welchen Stellen liegen die möglichen lokalen Extrema der Funktion:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 \ ; x_1, x_2 > 0$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $x_1^4 + x_2^4 = 162$?
Lösung: (3;3) mögliche Extremstelle unter NB

Aufgabe 11.2
Ein Erdölproduzent betreibt zwei Ölquellen Q_1 und Q_2 jeweils mit den fixen Kosten 500. Die variablen Kosten betragen in Abhängigkeit der Fördermengen x_1 und x_2 : $K_1(x_1) = 0{,}5x_1^2$ für Q_1 und $K_2(x_2) = x_2^2 + 2x_2$ für Q_2. Die Summe der beiden Fördermengen soll 80 Einheiten betragen. Die Kostenfunktion $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des Produzenten ist somit gegeben durch:

$$K(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1000.$$

Ermitteln Sie unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 80$$

eine Kostenminimalstelle.
Lösung: (54;26) glob. Minimalstelle unter NB

Aufgabe 11.3
Die Produktionsfunktion der Unternehmung A sei

$$x(r_1, r_2) = 15r_2 + 26r_1 + 2r_1r_2 - r_2^2 - 2r_1^2,$$

wobei r_1 und r_2 die Mengen zweier unterschiedlicher Arbeitsinputs U und V bezeichnen. Der Lohnsatz für U sei 3, der für V gleich 2. Die Unternehmung will insgesamt nur 50 Geldeinheiten für die Arbeitsinputs ausgeben. Ermitteln Sie den größtmöglichen Output. Dabei gelte für die Produktionskosten und den Output derselbe Maßstab.
Lösung: $(\frac{257}{29}; \frac{679}{58})$ *glob. Maximalstelle unter NB*

Aufgabe 11.4 (leicht!)
Die Kostenfunktion einer Unternehmung für die Produktion ihrer beiden Produkte X und Y betrage in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x bzw. y:

$$K(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 9y + 5 \ ; x \geq 2, y \geq 3$$

Es sollen insgesamt 20 Produkteinheiten produziert werden. Welche Stückzahlen sollen jeweils vom Produkt X und vom Produkt Y hergestellt werden, damit die

Produktion der 20 Stück kostenminimal erfolgt?
Lösung: (14,125 ; 5,875) glob. Mininalstelle unter NB

Aufgabe 11.5
Ein Monopolist bietet zwei Produkte A und B an, für die folgende Preis-Absatz-Funktionen gelten:

$$p_A(x_A) = 48 - 4x_A$$
$$p_B(x_B) = 44 - 2x_B$$

Die Herstellung beider Produkte erfolgt auf einer Produktionsanlage, deren fixe Kosten 100 Geldeinheiten (GE) betragen. Produkt A verursacht an variablen Kosten 8 GE/ME, während Produkt B an variablen Kosten 12 GE/ME verursacht. Die Produktionszeit von A beträgt 32 Zeiteinheiten pro ME, von B beträgt sie 4 Zeiteinheiten pro ME.

Ermitteln Sie für beide Güter die gewinnmaximale Preis-Mengen-Kombination, sodass der Gesamtgewinn des Monopolisten maximal wird, für den Fall der vollen Ausnutzung einer beschränkten Produktionsanlage in Höhe von 60 Zeiteinheiten. Wie hoch ist dieser maximale Gesamtgewinn?
Lösung: $p_A = 44$ *GE und* $p_B = 30$ *GE und* $G(1;7) = 62$ *GE*

Aufgabe 11.6 (schwer!)
Aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 wird ein Gut hergestellt. In Abhängigkeit der Einsatzmengen r_1=ME von R_1 und r_2=ME von R_2 gilt für den Produktionsprozess folgende Produktionsfunktion:

$$x(r_1; r_2) = 6 \cdot r_1^{1/3} \cdot r_2^{2/3} \quad ; r_1, r_2 > 0$$

wobei x die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten des Guts bezeichnet.

Die Fixkosten der Produktion betragen 100 GE.

Die Rohstoffe kosten 8 GE pro ME von R_1 und 2 GE pro ME von R_2. Der Verkaufspreis pro Stück des Guts beträgt 20 GE.

Wie hoch ist der maximale Gewinn, wenn genau 24 ME des Guts hergestellt werden sollen?
Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe mit der Einsetz-Methode
Lösung: $G(1;8) = 356$ *GE*

Aufgabe 11.7
Gegeben sind in Abhängigkeit der produzierten und abgesetzten Mengen x bzw. y zweier Güter die Kostenfunktion:

$$K(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy + 100 \quad ; x, y \geq 0$$

und die Umsatzfunktion:

$$U(x,y) = 120x - 2x^2 + 60y - y^2 \quad ; x, y \in [0; 60]$$

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn, wenn von beiden Gütern zusammen genau 18 ME hergestellt und abgesetzt werden.
Lösung: $G(14;4) = 860$ *GE*

Aufgabe 11.8
Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 2x + 5y + 7\ ; x > 0, y > 0$.
Ermitteln Sie unter der Nebenbedingung

$$x^2 + 3y^2 = 444$$

das globale Maximum mit Hilfe der Lagrange-Methode.
Lösung: (12;10) glob. Maximalstelle unter NB

Aufgabe 11.9
Es bezeichnen x die Mengeneinheiten von Gut I und y die Mengeneinheiten von Gut II. Drücken Sie die nachfolgenden Nebenbedingungen sowohl als mathematischen Term als auch als Nebenbedingung in Nullform aus:

a) Von Gut I sollen doppelt so viele Mengeneinheiten wie von Gut II hergestellt werden.

b) Von beiden Gütern sollen zusammen 50 Mengeneinheiten hergestellt werden.

c) An Rohmaterial kosten Gut I drei Geldeinheiten pro Stück und Gut II vier Geldeinheiten pro Stück. Als Budget zum Kauf des Rohmaterials für die beiden Güter stehen 80 Geldeinheiten zur Verfügung. Das Budget soll vollständig aufgebraucht werden.

Lösung von Aufgabe 11.1

1. Lösungsweg: Lagrange-Methode

$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2\cdot x_2^2+\lambda(x_1^4+x_2^4-162)$

$L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1x_2^2+4\lambda x_1^3 \quad L_{x_1x_1}(x_1,x_2,\lambda)=2x_2^2+12\lambda x_1^2$

$L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1^2x_2+4\lambda x_2^3 \quad L_{x_2x_2}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1^2+12\lambda x_2^2$

$L_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda)=x_1^4+x_2^4-162 \quad L_{x_1x_2}(x_1,x_2,\lambda)=4x_1x_2$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0 & = & 2x_1x_2^2+4\lambda x_1^3 \\
\text{II} & 0 & = & 2x_1^2x_2+4\lambda x_2^3 \\
\text{III} & 0 & = & x_1^4+x_2^4-162 \\
\hline
x_1\cdot\text{I} & 0 & = & 2x_1^2x_2^2+4\lambda x_1^4 \\
x_2\cdot\text{II} & 0 & = & 2x_1^2x_2^2+4\lambda x_2^4 \\
\hline
x_1\cdot\text{I}-x_2\cdot\text{II} & 0 & = & 4\lambda x_1^4-4\lambda x_2^4 \Rightarrow x_1^4=x_2^4 \Rightarrow x_1=x_2 \\
\text{III} & 0 & = & x_1^4+x_1^4-162 \\
 & 2x_1^4 & = & 162 \\
 & x_1^4 & = & 81 \Rightarrow \underbrace{x_1=-3}_{\notin \text{ Def.bereich}} \quad \text{oder } x_1=3 \Rightarrow x_2=3 \\
\text{I} & 0 & = & 54+\lambda\cdot 108 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}=-0{,}5
\end{array}$$

d.h. in (3;3) liegt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung eine mögliche Extremstelle von $f(x_1,x_2)$.

2. Lösungsweg: Einsetz-Methode

NB: $x_1^4+x_2^4=162 \Rightarrow x_2=+\sqrt[4]{162-x_1^4}$

Setze $f(x_1)=x_1^2\cdot\sqrt{162-x_1^4}$

$f'(x_1)=2x_1(162-x_1^4)^{0,5}+x_1^2\cdot 0{,}5\cdot(162-x_1^4)^{-0,5}\cdot(-4x_1^3)$

Notwendige Bedingung:

$$0=2x_1(162-x_1^4)^{0,5}-\frac{2x_1^5}{(162-x_1^4)^{0,5}} \qquad |\cdot(162-x_1^4)^{0,5}$$

$$0=2x_1(162-x_1^4)-2x_1^5=324x_1-4x_1^5 \qquad |\div x_1 \text{ und } +4x_1^4$$

$$4x_1^4=324 \Leftrightarrow x_1^4=81 \Leftrightarrow \underbrace{x_1=-3}_{\notin \text{ Def.bereich}} \quad \text{oder } x_1=3 \Rightarrow x_2=3$$

d.h. in (3;3) liegt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung eine mögliche Extremstelle von $f(x_1,x_2)$.

Lösung von Aufgabe 11.2

$K(x_1,x_2)=0{,}5x_1^2+x_2^2+2x_2+1\,000$

Nebenbedingung:

$x_1+x_2=80 \Rightarrow x_2=80-x_1$

Setze: $K(x_1)=0{,}5x_1^2+(80-x_1)^2+2(80-x_1)+1\,000=1{,}5x_1^2-162x_1+7\,560$

Dann hat $K(x_1,x_2)$ in $(54\,;26)$ ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung von Aufgabe 11.3
$x(r_1, r_2) = 15r_2 + 26r_1 + 2r_1r_2v - r_2^2 - 2r_1^2$
Nebenbedingung:
$3r_1 + 2r_2 = 50 \Rightarrow r_2 = 25 - \frac{3}{2}r_1$

$$\text{Setze: } x(r_1) = 15\left(25 - \frac{3}{2}r_1\right) + 26r_1 + 2r_1\left(25 - \frac{3}{2}r_1\right) - \left(25 - \frac{3}{2}r_1\right)^2 - 2r_1^2$$
$$= -\frac{29}{4}r_1^2 + \frac{257}{2}r_1 - 250$$

Dann hat $x(r_1; r_2)$ in $\left(\frac{257}{29}; \frac{679}{58}\right)$ ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung von Aufgabe 11.4
$K(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 9y + 5$
Nebenbedingung:
$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$
Setze: $K(x) = x^2 + 3(20 - x)^2 - 2x - 9(20 - x) + 5 = 4x^2 - 113x + 1\,025$
Dann hat $K(x, y)$ in $(14{,}125\,; 5{,}875)$ ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung von Aufgabe 11.5
Umsatz $U(x_A, x_B) = p_A \cdot x_A + p_B \cdot x_B = 48x_A - 4x_A^2 + 44x_B - 2x_B^2$
Kosten $K(x_A, x_B) = 8x_A + 12x_B + 100$
Gewinn $G(x_A, x_B) = U(x_A, x_B) - K(x_A, x_B) = 40x_A - 4x_A^2 + 32x_B - 2x_B^2 - 100$
Ziel: $G(x_A, x_B) \overset{!}{=}$ minimal unter NB $60 = 32x_A + 4x_B \Rightarrow x_B = 15 - 8x_A$

$$\begin{aligned}\text{Setze: } G(x_A) &= 40x_A - 4x_A^2 + 32(15 - 8x_A) - 2(15 - 8x_A)^2 - 100\\ &= 40x_A - 4x_A^2 + 480 - 256x_A - 450 + 480x_A - 128x_A^2 - 100\\ &= -132x_A^2 + 264x_A - 70\end{aligned}$$

Dann hat $G(x_A, x_B)$ in (1;7) ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.
Die Gewinn-maximalen Mengen sind $x_A = 1$ ME und $x_B = 7$ ME.
Die Gewinn-maximalen Preise sind: $p_A = 48 - 4 = 44$ GE, $p_B = 44 - 14 = 30$ GE.
Der maximale Gewinn beträgt $G(1; 7) = 62$ GE.

Lösung zu Aufgabe 11.6
$U(r_1, r_2) = 20 \cdot x = 20 \cdot 6 \cdot r_1^{1/3} \cdot r_2^{2/3} = 120 \cdot r_1^{1/3} \cdot r_2^{2/3}$
$K(r_1, r_2) = 8r_1 + 2r_2 + 100$
$G(r_1, r_2) = 120 \cdot r_1^{1/3} \cdot r_2^{2/3} - 8r_1 - 2r_2 - 100$
Ziel: $G(r_1, r_2) \overset{!}{=}$ max unter NB $24 = 6r_1^{1/3} \cdot r_2^{2/3}$
Der Clou ist zu erkennen, dass unter der NB der Umsatz $20 \cdot 24$ beträgt!
Einsetzmethode:

$$\begin{array}{rcll}\text{NB:}\quad 24 &=& 6\cdot r_1^{1/3}\cdot r_2^{2/3} & \mid \div 6\\ 4 &=& r_1^{1/3}\cdot r_2^{2/3} & \mid \text{ hoch } 3\\ 64 &=& r_1\cdot r_2^2 & \mid \div r_2^2\\ \frac{64}{r_r^2} &=& r_1 & \end{array}$$

⚠$G(r_2) = 20\cdot \boxed{24} - 8\cdot\frac{64}{r_2^2} - 2r_2 - 100 = -\frac{512}{r_2^2} - 2r_2 + 380$

$G'(r_2) = \frac{1\,024}{r_2^3} - 2$

$G''(r_2) = -\frac{3\,072}{r_2^4}$

Notwendige Bedingung:

$0 = -2 + \frac{1\,024}{r_2^3} \Rightarrow 2 = \frac{1\,024}{r_2^3} \Rightarrow r_2^3 = 512 \Rightarrow r_2 = 8$

Hinreichende Bedingung:

$G''(r_2) = -\frac{3\,072}{r_2^4} <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(r_1, r_2)$ hat in (1;8) ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

$G(1;8) = 480 - 8 - 16 - 100 = 356$

d.h. unter der Nebenbedingung beträgt der maximale Gewinn 356 GE.

Die Lagrange-Methode funktioniert leider nicht, weil dann die Differenz $D(r_1, r_2, \lambda_0)$ null beträgt.

Lagrange-Methode:

$L(r_1, r_2, \lambda) = 20\cdot 24 - 8r_1 - 2r_2 - 100 + \lambda\left(6r_1^{1/3}\cdot r_2^{2/3} - 24\right)$

$$\begin{array}{ll} L_{r_1}(r_1,r_2,\lambda) = -8 + 2\lambda r_1^{-2/3}\cdot r_2^{2/3} & L_{r_1r_1}(r_1,r_2,\lambda) = -\frac{4}{3}\lambda\cdot r_1^{-5/3}\cdot r_2^{2/3}\\ L_{r_2}(r_1,r_2,\lambda) = -2 + 4\lambda r_1^{1/3}\cdot r_2^{-1/3} & L_{r_2r_2}(r_1,r_2,\lambda) = -\frac{4}{3}\lambda\cdot r_1^{1/3}\cdot r_2^{-4/3}\\ L_{\lambda}(r_1,r_2,\lambda) = 6r_1^{1/3}\cdot r_2^{2/3} - 24 & L_{r_1r_2}(r_1,r_2,\lambda) = \frac{4}{3}\lambda\cdot r_1^{-2/3}\cdot r_2^{-1/3} \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 4 &=& \lambda r_1^{-2/3}\cdot r_2^{2/3} \Leftrightarrow 64 = \lambda^3\cdot\frac{r_2^2}{r_1^2}\\ \text{II} & 1 &=& 2\lambda r_1^{1/3}\cdot r_2^{-1/3} \Leftrightarrow 1 = 8\lambda^3\cdot\frac{r_1}{r_2}\\ \text{III} & 4 &=& r_1^{1/3}\cdot r_2^{2/3} \Leftrightarrow r_1\cdot r_2^2 = 64 \Leftrightarrow r_1 = \frac{64}{r_2^2} \end{array}$$

Jetzt wird für r_1 der Term $\frac{64}{r_2^2}$ in die erste und die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 64 &=& \lambda^3\cdot\frac{r_2^4}{4\,096}\cdot r_2^2 \Leftrightarrow \lambda^3\cdot r_2^6 = 262\,144\\ \text{II} & 1 &=& 8\lambda^3\cdot\frac{64}{r_2^3} \Leftrightarrow \frac{\lambda^3}{r_2^3} = \frac{1}{512} \end{array}$$

Jetzt wird der Term $\frac{\lambda^3}{r_2^3}$ in der ersten Gleichung ersetzt durch $\frac{1}{512}$:

I $\left(\frac{\lambda^3}{r_2^3}\right) \cdot r_2^9 = \frac{1}{512} \cdot r_2^9 = 262\,144 \Leftrightarrow r_2^9 = 134\,217\,728 \Leftrightarrow r_2 = 8$
Daraus ergibt sich für r_1:
III $r_1 \;=\; \frac{64}{8^2} = 1$
Der Wert von λ ergibt sich aus der zweiten Gleichung wie folgt:
II $0 \;=\; -2 + 4\lambda \cdot 1^{1/3} \cdot 8^{-1/3} = -2 + 4\lambda \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -2 + 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$
Hinreichende Bedingung:
$D(r_1, r_2, 1) = -\frac{4}{3} r_1^{-5/3} \cdot r_2^{2/3} \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot r_1^{1/3} \cdot r_2^{-4/3} - \frac{16}{9} r_1^{-4/3} \cdot r_2^{-2/3} = \frac{16}{9} r_1^{-4/3} \cdot r_2^{-2/3} - \frac{16}{9} r_1^{-4/3} \cdot r_2^{-2/3} = 0$

Lösung zu Aufgabe 11.7:
$G(x, y) = U(x, y) - K(x, y) = -4x^2 - 4y^2 - 2xy + 120x + 60y - 100 \;\; ; x, y \in [0; 60]$
NB: $x + y = 18 \Leftrightarrow x = 18 - y$
Setze $G(y) = -4(18 - y)^2 - 4y^2 - 2(18 - y)y + 120(18 - y) + 60y - 100$
$G(y) = -1\,296 + 144y - 4y^2 - 4y^2 - 36y + 2y^2 + 2\,160 - 120y + 60y - 100$
$G(y) = -6y^2 + 48y + 764$
$G'(y) = -12y + 48$
$G''(y) = -12$
Notwendige Bedingung:
$0 = -12y + 48 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 18 - 4 = 14$
Hinreichende Bedingung:
$G''(y) = -12 <_{\text{immer}} 0$
d.h. (14;4)=glob. Maximalstelle unter NB
$G(14; 4) = 860$
d.h. unter Berücksichtigung der Nebenbedingung beträgt der maximale Gewinn 860 GE.

Lösung zu Aufgabe 11.8:
$L(x, y, \lambda) = 2x + 5y + 7 + \lambda(x^2 + 3y^2 - 444)$

$L_x(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda x \qquad L_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$
$L_y(x, y, \lambda) = 5 + 6\lambda y \qquad L_{yy}(x, y, \lambda) = 6\lambda$
$L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 3y^2 - 444 \qquad L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$

Notwendige Bedingung:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0 & = & 2+2\lambda x \\
\text{II} & 0 & = & 5+6\lambda y \\
\text{III} & 0 & = & x^2+3y^2-444 \\
\hline
3y\cdot\text{I} & 0 & = & 6y+6\lambda xy \\
x\cdot\text{II} & 0 & = & 5x+6\lambda xy \\
\hline
3y\cdot\text{I}-x\cdot\text{II} & 0 & = & 6y-5x \Rightarrow x=1{,}2y \\
\text{III} & 0 & = & (1{,}2y)^2+3y^2-444 \\
 & 0 & = & 1{,}44y^2+3y^2-444 \\
 & 0 & = & 4{,}44y^2-444 \\
 & 0 & = & y^2-100 \Rightarrow \quad \underbrace{y=-10}_{\notin \text{ Def.bereich}} \quad \text{oder } y=10 \Rightarrow x=12 \\
\text{I} & 0 & = & 2+2\lambda\cdot 12 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{12}
\end{array}
$$

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;-\dfrac{1}{12})=2\cdot(-\dfrac{1}{12})\cdot 6\cdot(-\dfrac{1}{12})-0^2=\dfrac{12}{144}>_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x;y;-\dfrac{1}{12})=2\cdot(-\dfrac{1}{12})=-\dfrac{1}{6}<_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x;y)$ hat in (12;10) ein glob. Max unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Die notwendige Bedingung lässt sich auch wie folgt lösen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 0 & = & 2+2\lambda x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\lambda} \\
\text{II} & 0 & = & 5+6\lambda y \Leftrightarrow y=-\frac{5}{6\lambda} \\
\text{III} & 0 & = & x^2+3y^2-444=\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{5}{6\lambda}\right)^2-444=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{25}{12\lambda^2}-444 \mid \cdot 12\lambda^2 \\
 & 0 & = & 12+25-5\,328\lambda^2=37-5\,328\lambda^2 \\
 & 37 & = & 5\,328\lambda^2 \Leftrightarrow \frac{1}{144}=\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{12}
\end{array}
$$

1. Fall: $\lambda=\dfrac{1}{12}\Rightarrow x=-\dfrac{1}{1/12}=-12\notin$ Def.bereich

2. Fall: $\lambda=-\dfrac{1}{12}\Rightarrow x=-\dfrac{1}{-1/12}=12$

$y=-\dfrac{5}{6\cdot -1/12}=10$

Lösung zu Aufgabe 11.9:

a) $x=2y$ und $x-2y=0$

b) $x+y=50$ und $x+y-50=0$

c) $3x+4y=80$ und $3x+4y-80=0$

Zusammenfassung: **Optimierung unter Nebenbedingungen**

Zur Optimierung unter einer Nebenbedingung kennen wir zwei Methoden.
Die Einsetz-Methode scheint auf den ersten Blick vom Rechenaufwand weniger aufwändig zu sein als die Lagrange-Methode. Lässt sich eine Nebenbedingung „einfach“ nach x oder y auflösen, so ist die Einsetz-Methode der Lagrange-Methode vorzuziehen. Ist jedoch die Nebenbedingung zum Beispiel quadratisch; d.h. $x^2+y^2=c$, so ist es häufig einfacher, die Optimierung mit Hilfe der Lagrange-Methode zu bestimmen.

Mit Nebenbedingung (Lagrange-Methode)	
Eigenschaft	Überprüfung
lok. Min in $(x_0;y_0)$	$L_x(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_y(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_\lambda(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_{xx}(x_0;y_0;\lambda_0)\cdot L_{yy}(x_0;y_0;\lambda_0)-(L_{xy}(x_0;y_0;\lambda_0))^2>0$ $L_{xx}(x_0;y_0;\lambda_0)>0$
lok. Max in $(x_0;y_0)$	$L_x(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_y(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_\lambda(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_{xx}(x_0;y_0;\lambda_0)\cdot L_{yy}(x_0;y_0;\lambda_0)-(L_{xy}(x_0;y_0;\lambda_0))^2>0$ $L_{xx}(x_0;y_0;\lambda_0)<0$
glob. Min in $(x_0;y_0)$	$L_x(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_y(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_\lambda(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_{xx}(x;y;\lambda_0)\cdot L_{yy}(x;y;\lambda_0)-(L_{xy}(x;y;\lambda_0))^2>0$ für alle $x,y\in \mathsf{D}_f$ $L_{xx}(x;y;\lambda_0)>0$ für alle $x,y\in \mathsf{D}_f$
glob. Max in $(x_0;y_0)$	$L_x(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_y(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_\lambda(x_0;y_0;\lambda_0)=0$ $L_{xx}(x;y;\lambda_0)\cdot L_{yy}(x;y;\lambda_0)-(L_{xy}(x;y;\lambda_0))^2>0$ für alle $x,y\in \mathsf{D}_f$ $L_{xx}(x;y;\lambda_0)<0$ für alle $x,y\in \mathsf{D}_f$