Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenwissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zu QM I (Wirtschaftsmathematik)

Folgen und ökonomische Funktionen

Aufgabe 3.1
Geben Sie das Bildungsgesetz folgender Folgen an:

$$4, -4, 4, -4, 4, -4, \ldots$$
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$
$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Aufgabe 3.2
Berechnen Sie die ersten sechs Folgenglieder der Folgen:
$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}, \quad b_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n, \quad c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

Aufgabe 3.3
Welche der Folgen unter Aufgabe 3.1 und Aufgabe 3.2 sind

a) arithmetische Folgen?

b) geometrische Folgen?

c) alternierende Folgen?

d) monoton wachsende oder monoton fallende Folgen?

e) beschränkte Folgen?

f) Nullfolgen?

g) divergent?

Aufgabe 3.4
Eine Unternehmung produziert 100 Einheiten eines Produkts in der Zeitperiode $t = 0$. Bei einem Anstieg des Produktionsniveaus um 10% pro Periode erhält man als gerundete Ergebnisse:

in der Zeitperiode	1	2	3	4	…
Anzahl der Einheiten	110	121	133	146	…

Das zeitabhängige Produktionsniveau ist eine geometrische Folge (a_t) mit $a_t = 110 \cdot 1{,}1^{t-1}$.
Zu welchem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ wird die Zahl von 200 produzierten Einheiten erstmals überschritten?

Aufgabe 3.5

Berechnen Sie: $\sum_{i=1}^{10} i$.

Aufgabe 3.6

Berechnen Sie: $\sum_{i=0}^{5} \frac{1}{i!}$.

Aufgabe 3.7

Bei der Produktion eines Gutes fallen folgende Kosten $K(x)$ in Abhängigkeit der produzierten Menge x (Ausbringungsmenge) an:

$$K(x) = 2x^2 + 50x + 200.$$

Der Umsatz/Erlös $U(x)$ ist gegeben durch:

$$U(x) = 160x - 4x^2.$$

Maximal können 40 ME des Gutes produziert und abgesetzt werden.

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ und ihren Definitionsbereich.

b) Bestimmen Sie die Funktion $K_v(x)$ der variablen Gesamtkosten und ihren Definitionsbereich.

c) Bestimmen Sie die Funktion $K_f(x)$ der fixen Gesamtkosten und ihren Definitionsbereich.

d) Bestimmen Sie die Funktion $k(x)$ der Stückkosten/Durchschnittskosten und ihren Definitionsbereich.

e) Bestimmen Sie die Funktion $k_v(x)$ der variablen Stückkosten und ihren Definitionsbereich.

f) Bestimmen Sie die Preis-Absatzfunktion $p(x)$ in Abhängigkeit von x und ihren Definitionsbereich.

g) Bestimmen Sie die Preis-Absatzfunktion $x(p)$ in Abhängigkeit vom Verkaufspreis p und ihren Definitionsbereich.

h) Stellen Sie die Kostenfunktion und die Umsatzfunktion grafisch dar und lesen Sie aus dem Grafen die Gewinnzone ab.

Lösung zu Aufgabe 3.1
$a_n = 4\cdot(-1)^{n+1};\ n\in\mathbb{N}$
$a_n = \dfrac{1}{2^n};\ n\in\mathbb{N}$
$a_n = \dfrac{n}{5};\ n\in\mathbb{N}$

Lösung zu Aufgabe 3.2

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0,25	0,18	0,11	0,06	0,03	0,02

n	1	2	3	4	5	6
b_n	4	6,25	8	9,38	10,49	11,39

n	1	2	3	4	5	6
c_n	−1	0,25	−0,11	0,06	−0,04	0,03

Lösung zu Aufgabe 3.3

a) arithmetische Folge ist $a_n = \frac{n}{5}$ mit $d = \frac{1}{5}$

b) geometrische Folgen sind $a_n = 4\cdot(-1)^{n+1}$ mit $q = -1$ und $a_n = \frac{1}{2^n}$ mit $q = \frac{1}{2}$

c) alternierende Folgen sind $a_n = 4\cdot(-1)^{n+1}$ und $c_n = (-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$

d) monoton wachsende Folgen sind $a_n = \frac{n}{5}$, $b_n = (1+\frac{3}{n})^n$
monoton fallende Folgen sind $a_n = \frac{1}{2^n}$ und $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}$

e) beschränkte Folgen sind $a_n = 4\cdot(-1)^{n+1} \in [-4;+4]$
$a_n = \frac{1}{2^n} \in [0;\frac{1}{2}]$
$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \in [0;0{,}25]$
$b_n = (1+\frac{3}{n})^n \in [4;e^3]$
$c_n = (-1)^n\cdot\frac{1}{n^2} \in [-1;0{,}25]$

f) Nullfolgen sind $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}$, $c_n = (-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$

g) divergente Folgen sind $a_n = 4\cdot(-1)^{n+1}$ und $a_n = \frac{n}{5}$

Lösung zu Aufgabe 3.4

$$\begin{aligned}
110\cdot 1{,}1^{t-1} &= 200 && |\div 110\\
1{,}1^{t-1} &= 1{,}8182\\
t-1 &= \log_{1,1} 1{,}8182\\
t-1 &= \tfrac{\ln 1{,}8182}{\ln 1{,}1}\\
t-1 &= 6{,}2725 && |+1\\
t &= 7{,}2725
\end{aligned}$$

d.h. nach acht Jahren.

Lösung zu Aufgabe 3.5

$$\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+\ldots+10 = 55$$

Lösung zu Aufgabe 3.6

$$\sum_{i=0}^{5} \frac{1}{i!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 2{,}718$$

Lösung zu Aufgabe 3.7

a) $G(x) = -6x^2 + 110x - 200 \; ; x \in [0; 40]$

b) $K_v(x) = 2x^2 + 50x \; ; x \in [0; 40]$

c) $K_f(x) = 200 \; ; x \in [0; 40]$

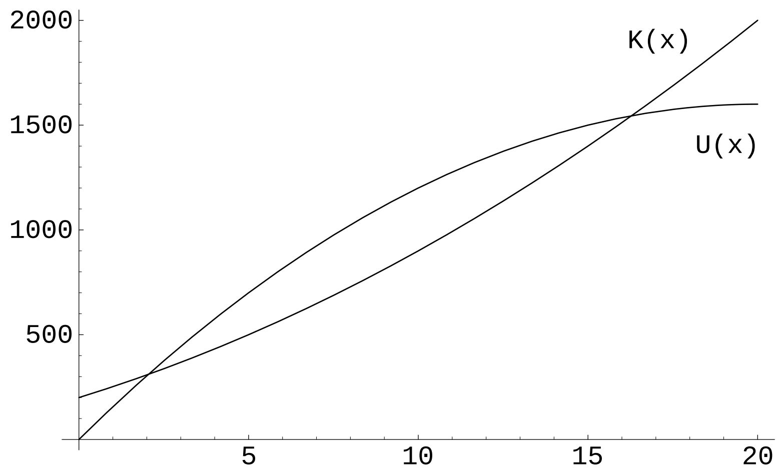
d) $k(x) = 2x + 50 + \dfrac{200}{x} \; ; x \in (0; 40]$

e) $k_v(x) = 2x + 50 \; ; x \in (0; 40]$

f) $p(x) = 160 - 4x \; ; x \in [0; 40]$

g) $x(p) = 40 - 0{,}25p \; ; p \in [0; 160]$

h) zeichnerisch ermittelte Gewinnzone:



rechnerisch ermittelte Gewinnzone=(2,05 ; 16,29)