Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Verknüpfungen und ökonomische Funktionen

Aufgabe 4.1
Drücken Sie die nachfolgenden Funktionen $h(x)$ als die Verknüpfung $f \circ g$ zweier Funktionen von g und f aus.

a) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
$h(x) = (7x-5)^4$

b) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$h(x) = e^{7x-5}$

c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$h(x) = 7x^4 - 5$

Aufgabe 4.2
In einem Unternehmen lautet die Funktion der variablen Stückkosten $k_v(x)$ eines Gutes:

$$k_v(x) = \frac{1}{100}x^2 + \frac{15}{100}x + 10$$

wobei x die produzierte Menge des Gutes bezeichnet.
Die gesamten Fixkosten betragen 200 GE. Die Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch:

$$x(p) = \frac{2\,000 - 5p}{3}$$

wobei p den Verkaufspreis pro ME des Gutes bezeichnet.

a) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Preis-Absatz-Funktion $x(p)$an.

b) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ und geben Sie ihren Definitionsbereich und Wertebereich an.

c) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ und ihren Definitionsbereich.

d) Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$, die in Abhängigkeit der abgesetzten Menge x den Gewinn pro einer ME des Gutes angibt.

e) Die Fixkosten müssen aus innerbetrieblichen Gründen <u>um</u> 800 GE erhöht werden. Stellen Sie die neue Gewinnfunktion auf. Wie lautet die Funktion $g(x)$, die den Stückgewinn angibt?

Aufgabe 4.3
Für ein Unternehmen existiere die Gewinnfunktion

$$G(x) = -3x^2 + 150x - 600$$

und die Produktionsfunktion

$x(r) = 2\sqrt{r} - 20, \quad r \geq 100$

Die Produktionsfunktion gibt die ausgebrachte Menge x in Abhängigkeit der Einsatzmenge r des Produktionsfaktors (z. B. Arbeitszeit) an.
Der Produktionsfaktor r kann zu einem Preis von GE 6 je Einheit erworben werden. Weitere Kosten entstehen bei der Produktion nicht.

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $r(x)$ der Produktionsfunktion, die die benötigte Einsatzmenge des Produktionsfaktors in Abhängigkeit von der ausgebrachten Menge angibt. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion $r(x)$an.

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$.

c) Bestimmen Sie die Umsatzfunktion/Erlösfunktion $U(x)$.

d) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$, die in Abhängigkeit der abgesetzten Menge x den Verkaufspreis pro einer ME des Gutes angibt.

e) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $x(p)$, die in Abhängigkeit des Verkaufspreises p die abgesetzte Menge x des Gutes angibt.

Aufgabe 4.4

Für ein Unternehmen existiere die Gewinnfunktion

$G(x) = -4x^2 + 400x - 200; \quad x \geq 0$

und die Produktionsfunktion

$x(r) = 5 \cdot r^{\frac{1}{2}} - 10; \quad r \geq 4$

Der Produktionsfaktor r kann zu einem Preis von 50 GE je Einheit erworben werden. Weitere Kosten entstehen bei der Produktion nicht.
Bestimmen Sie aus diesen Informationen die Preis-Absatz-Funktion des Unternehmens und stellen Sie diese in Form $x(p)$ dar.
Bearbeitungshinweis: Bestimmen Sie nacheinander $r(x), K(x), U(x), p(x)$ und $x(p)$.

Aufgabe 4.5

Ergänzen Sie bitte die fehlenden Zahlen in der nachfolgenden Tabelle:

Firma	Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten
1			800		100	360		36
2	5	500			500	800		
3			4 000	6 000			2,4	1,3
4			5 000	5 000	3 500			0,75
5	10	500		8 000				12

Lösung zu Aufgabe 4.1

a) $g(x) = 7x - 5$ und $f(y) = y^4$

b) $g(x) = 7x - 5$ und $f(y) = e^y$

c) $g(x) = x^4$ und $f(y) = 7y - 5$
oder $g(x) = 7x^4$ und $f(y) = y - 5$
oder ...

Lösung zu Aufgabe 4.2

a) Definitionsbereich: $p \in [0\,;\,400]$
Wertebereich: $x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$

b) $p(x) = 400 - 0{,}6x$
Definitionsbereich: $x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$
Wertebereich: $p \in [0\,;\,400]$

c) $G(x) = -0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 390x - 200 \ ; x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$

d) $g(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}75x + 390 - \dfrac{200}{x}$

e) $G(x) = -0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 390x - 1\,000 \ ; x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$
$g(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}75x + 390 - \dfrac{1\,000}{x}$

Lösung zu Aufgabe 4.3

a)
$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{r} - 20 && \mid +20 \\ x + 20 &= 2\sqrt{r} && \mid \div 2 \\ 0{,}5x + 10 &= \sqrt{r} && \mid \text{quadrieren} \\ (0{,}5x + 10)^2 &= r && \mid (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 0{,}25x^2 + 10x + 100 &= r \end{aligned}$$
$r(x) = 0{,}25x^2 + 10x + 100$
Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}_0^+$
Wertebereich: $r \in [100; \infty)$

b) $K(x) = 6 \cdot r = 6 \cdot (0{,}25x^2 + 10x + 100) = 1{,}5x^2 + 60x + 600$

c) $U(x) = G(x) + K(x) = -1{,}5x^2 + 210x$

d) $p(x) = \dfrac{U(x)}{x} = -1{,}5x + 210$

e) $x(p) = 140 - \frac{2}{3}p$

Lösung zu Aufgabe 4.4

$$\begin{array}{rcll} x &=& 5\sqrt{r}-10 & \mid +10 \\ x+10 &=& 5\sqrt{r} & \mid \div 5 \\ 0{,}2x+2 &=& \sqrt{r} & \mid \text{quadrieren} \\ (0{,}2x+2)^2 &=& r & \mid (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ 0{,}04x^2+0{,}8x+4 &=& r & \end{array}$$

$$r(x) = \frac{x^2}{25} + \frac{4}{5}x + 4;\ \ x \geq 0$$

$$K(x) = 50 \cdot r = 50 \cdot \left(\frac{x^2}{25} + \frac{4}{5}x + 4\right) = 2x^2 + 40x + 200;\ \ x \geq 0$$

$$U(x) = G(x) + K(x) = -2x^2 + 440x;\ \ x \in [0; 220]$$

$$p(x) = \frac{U(x)}{x} = 440 - 2x;\ \ x \in [0; 220]$$

$$x(p) = 220 - 0{,}5p;\ \ p \in [0; 440]$$

Lösung zu Aufgabe 4.5

Firma	Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten
1	80	10	800	460	100	360	46	36
2	5	500	2 500	1 300	500	800	2,6	1,6
3	1,6	2 500	4 000	6 000	2 750	3 250	2,4	1,3
4	2,5	2 000	5 000	5 000	3 500	1 500	2,5	0,75
5	10	500	5 000	8 000	2 000	6 000	16	12

Firma 1:
$K_v(x) = x \cdot k_v(x) \Leftrightarrow 360 = x \cdot 36 \Leftrightarrow x = 10$

$$K(x) = K_v(x) + K_f(x) = 360 + 100 = 460$$

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{460}{10} = 46$$

$$U(x) = x \cdot p(x) \Leftrightarrow 800 = 10 \cdot p(x) \Leftrightarrow p(x) = 80$$

Firma 2:
$U(x) = x \cdot p(x) = 500 \cdot 5 = 2\,500$

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{800}{500} = 1{,}6$$

$$K(x) = K_v(x) + K_f(x) = 800 + 500 = 1\,300$$

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{1\,300}{500} = 2{,}6$$

Firma 3:

$$K(x) = x \cdot k(x) \Leftrightarrow 6\,000 = x \cdot 2{,}4 \Leftrightarrow x = 2\,500$$

$$U(x) = x \cdot p(x) \Leftrightarrow 4\,000 = 2\,500 \cdot p(x) \Leftrightarrow p(x) = 1{,}6$$

$$K_v(x) = x \cdot k_v(x) = 2\,500 \cdot 1{,}3 = 3\,250$$

$$K(x) = K_v(x) + K_f(x) \Leftrightarrow 6\,000 = 3\,250 + K_f(x) \Leftrightarrow K_f(x) = 2\,750$$

Firma 4:

$$K(x) = K_v(x) + K_f(x) \Leftrightarrow 5\,000 = K_v(x) + 3\,500 \Leftrightarrow K_v(x) = 1\,500$$

$$K_v(x) = x \cdot k_v(x) \Leftrightarrow 1\,500 = x \cdot 0{,}75 \Leftrightarrow x = 2\,000$$

$$U(x) = x \cdot p(x) \Leftrightarrow 5\,000 = 2\,000 \cdot p(x) \Leftrightarrow p(x) = 2{,}5$$

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{5\,000}{2\,000} = 2{,}5$$

Firma 5:

$$U(x) = x \cdot p(x) = 500 \cdot 10 = 5\,000$$

$$K_v(x) = x \cdot k_v(x) = 500 \cdot 12 = 6\,000$$

$$K(x) = K_v(x) + K_f(x) \Leftrightarrow 8\,000 = 6\,000 + K_f(x) \Leftrightarrow K_f(x) = 2\,000$$

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{8\,000}{500} = 16$$