Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Extremwerte und Kurvendiskussion

Aufgabe 8.1
Gegeben sind die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$und die Kostenfunktion $K(x)$:

$$p(x) = 400 - 0{,}02x \ ; \quad x \in [0; 20\,000]$$
$$K(x) = 10\,000 + 0{,}4x \ ; \quad x \in [0; \infty)$$

a) Ermitteln Sie den Gewinn-maximalen Preis und die Gewinn-maximale Menge.

b) Nehmen Sie an, mehr als 8 000 Stück können in der betrachteten Periode nicht produziert werden. Welchen Einfluss hat diese Kapazitätsrestriktion auf das Gewinnmaximum?

c) Wie verändert sich die Gewinn-maximale Menge, wenn höchstens 16 000 ME in der betrachteten Periode hergestellt werden können?

Aufgabe 8.2
Ein Monopolist produziert ein Gut mit der Kostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 20x + 100, \ \ x \in [0; 20]$$

und sieht sich der Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = -20x + 480, \ \ x \in [0; 20]$$

gegenüber.

a) Es sind die Gewinn-maximale Menge, der Gewinn-maximale Preis und der maximale Gewinn zu bestimmen.

b) Auf jede produzierte Menge wird einen Mengensteuer in Höhe von 140 GE/ME erhoben. Der Produzent fügt die Steuer seinen Kosten hinzu, sodass sich die Gesamtkosten um die abzuführende Gesamtsteuer $S = 140x$ erhöhen.
Ermitteln Sie erneut die Gewinn-maximale Menge, den Gewinn-maximalen Preis und den maximalen Gewinn sowie die abzuführende Steuer.

Aufgabe 8.3
Ein Monopolist hat folgende Gewinnfunktion:

$$G(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 15x - 100; \ \ x \in [10; 40]$$

wobei x die produzierte und abgesetzte Menge (in ME) bezeichnet.
Zusätzlich ist die Kostenfunktion des Unternehmens bekannt:

$$K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 5x + 100; \ \ x \in [10; 40]$$

a) Ermitteln Sie die Gewinn-maximale Menge und berechnen Sie für diese die Höhe der Grenzkosten und der Stückkosten.

b) Für welche Menge sind die variablen Stückkosten minimal?

c) Ermitteln Sie die Umsatzfunktion. Für welche Menge ist der Umsatz maximal?

Aufgabe 8.4

Ein Unternehmen kann ein Produkt entsprechend der Produktionsfunktion

$$x(r) = 6 \cdot \sqrt[3]{r^2} - 24 \;\; ; r \geq 8$$

herstellen, wobei

$x(r)$ = hergestellte Menge

r = Einsatzmenge eines Produktionsfaktors

bezeichnen.

Der Preis p des Produkts betrage GE 20 pro Einheit, wobei jede produzierte Menge auf dem Markt abgesetzt werden kann; d.h. Absatz = hergestellte Menge = $x(r)$. Der Preis pro eingesetzter Einheit des Produktionsfaktors r betrage GE 8.

a) Wie hoch sind Umsatz (Erlös), Kosten und Gewinn bei einer Produktion von 576 Einheiten?

b) Geben Sie die Gewinnfunktion in Abhängigkeit vom Absatz an.

c) Bei welcher produzierten und abgesetzten Menge wird der Gewinn maximal?

Aufgabe 8.5

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \;\; ; x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen von f.

Aufgabe 8.6

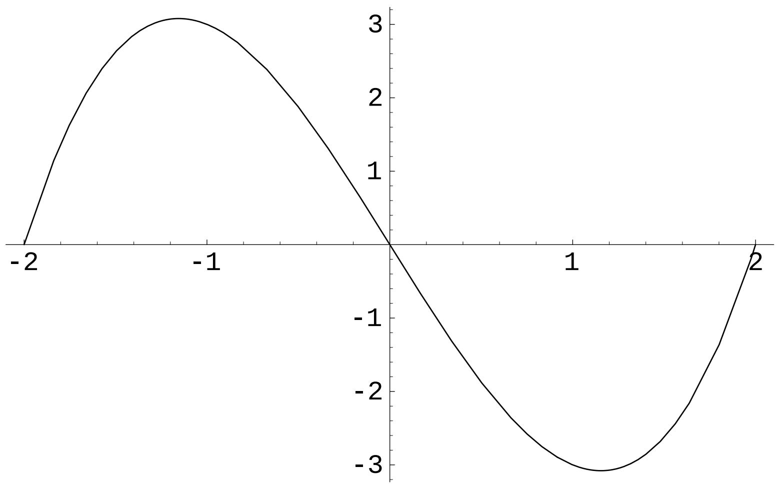
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \;\; ; x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen von f.

Aufgabe 8.7

Überlegen Sie, ohne eine Wertetabelle aufzustellen, zu welcher Funktion f der nachfolgende Graf gehört:



a) $f(x) = x^3 - 4$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = -x^3 + 4x$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $f(x) = -x^4 + 4x^2$

Aufgabe 8.8
Das globale Minimum der Stückkosten wird als Betriebsoptimum bezeichnet.

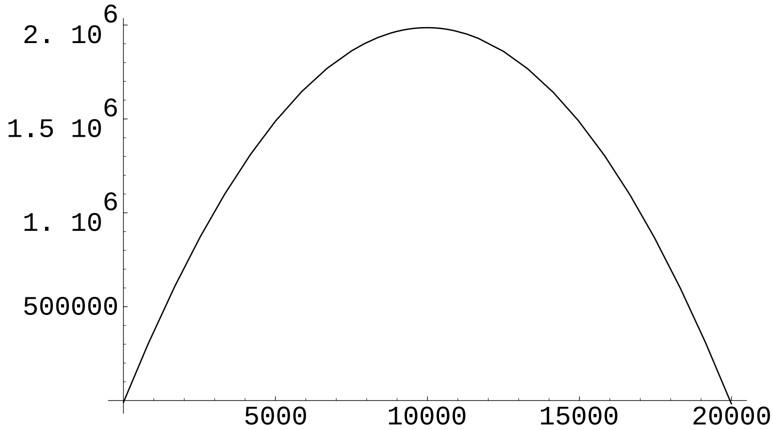
Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten	Grenzkosten
	Betriebsoptimumsstelle	4 000	4 000	2 500			1,5	

a) Wie hoch ist der Output?

b) Wie hoch ist das Betriebsoptimum?

c) Wie hoch sind die Grenzkosten?

Lösung von Aufgabe 8.1
Die Gewinnfunktion $G(x) = p(x) \cdot x - K(x) = -0{,}02x^2 + 399{,}6x - 10\,000$ sieht wie folgt aus:



a) Notwendige Bedingung:
$0 = G'(x) = -0{,}04x + 399{,}6 \Leftrightarrow x = 9\,990$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -0{,}04 <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 9\,990$ glob. Max.
Gewinn-maximale Menge 9 990 ME
Gewinn-maximaler Preis $p(9\,990) = 200{,}2$ GE

b) Da G streng monoton steigend auf [0;8 000] liegt das glob. Max am rechten Rand des Intervalls [0;8 000]; d.h. Gewinn-maximale Menge 8 000 ME
d.h. der Gewinn reduziert sich um $G(9\,990) - G(8\,000) = 1\,986\,002 - 1\,906\,800 = 79\,202$ GE

c) Die Gewinn-maximale Menge beträgt 9 990 ME, da $x = 9\,990$ aus Teilaufgabe a) in dem Intervall [0;16 000] liegt.

Lösung von Aufgabe 8.2

a) $G(x) = p(x) \cdot x - K(x) = -x^3 - 8x^2 + 460x - 100$; $x \in [0; 20]$
Notwendige Bedingung:
$$0 = G'(x) = -3x^2 - 16x + 460 \Leftrightarrow x = 10 \text{ oder } \underbrace{x = -\frac{46}{3}}_{\notin \text{ Def.bereich}}$$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -6x - 16 <_{\text{immer}} 0$; da $x \geq 0$
d.h. $x = 10$ glob. Max.
Gewinn-maximale Menge 10 ME
Gewinn-maximaler Preis $p(10) = 280$ GE
maximaler Gewinn $G(10) = 2\,700$ GE

b) $G(x) = (-x^3 - 8x^2 + 460x - 100) - 140x = -x^3 - 8x^2 + 320x - 100$; $x \in [0; 20]$

Notwendige Bedingung:
$0 = G'(x) = -3x^2 - 16x + 320 \Leftrightarrow x = 8$ oder $\underbrace{x = -\frac{4}{3}}_{\notin \text{ Def.bereich}}$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -6x - 16 <_{\text{immer}} 0$; da $x \geq 0$
d.h. $x = 8$ glob. Max.
Gewinn-maximale Menge 8 ME
Gewinn-maximaler Preis $p(8) = 320$ GE
maximaler Gewinn $G(8) = 1\,436$ GE
abzuführende Steuer $140 \cdot 8 = 1\,120$ GE

Lösung von Aufgabe 8.3

a) $G(x) = -\frac{x^3}{100} + \frac{x^2}{5} + 15x - 100$; $x \in [10; 40]$
Notwendige Bedingung:
$0 = G'(x) = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{2}{5}x + 15 \Leftrightarrow x = 30$ oder $\underbrace{x = -\frac{50}{3}}_{\notin \text{ Def.bereich}}$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -\frac{3}{50}x + \frac{2}{5} <_{\text{immer}} 0$; da $x \in [10; 40]$
d.h. $x = 30$ glob. Max.
Gewinn-maximale Menge 30 ME
Grenzkosten $K'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}4x + 5$
Grenzkosten $K'(30) = 20$ GE
Stückkosten $k(30) = \frac{K(30)}{30} = \frac{340}{30} = 11{,}33$ GE

b) $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = 0{,}01x^2 - 0{,}2x + 5$; $x \in [10; 40]$
Notwendige Bedingung:
$0 = k_v'(x) = 0{,}02x - 0{,}2 \Leftrightarrow x = 10$
Hinreichende Bedingung:
$k_v''(x) = 0{,}02 >_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 10$ glob. Min
Betriebsminimum 10 ME

c) $U(x) = G(x) + K(x) = 20x$; $x \in [10; 40]$
d.h. $U(x)$ ist eine steigende Gerade. Eine steigende Gerade hat ihr glob. Max am rechten Rand des Definitionsbereichs.
Umsatz-maximale Menge 40 ME

Lösung von Aufgabe 8.4

a)
$$\begin{aligned}
576 &= 6\cdot\sqrt[3]{r^2}-24 && \mid +24\\
600 &= 6\cdot\sqrt[3]{r^2} && \mid \div 6\\
100 &= \sqrt[3]{r^2} && \mid \text{hoch } 3\\
1\,000\,000 &= r^2 && \mid \text{Wurzel}\\
1\,000 &= r
\end{aligned}$$

Umsatz $U(x)=p(x)\cdot x=20x$ und $U(576)=20\cdot 576=11\,520$
Kosten $K(r)=8\cdot r$ und $K(1\,000)=8\,000$
Gewinn $=11\,520-8\,000=3\,520$ GE

b)
$$\begin{aligned}
x &= 6\cdot\sqrt[3]{r^2}-24 && \mid +24\\
x+24 &= 6\cdot\sqrt[3]{r^2} && \mid \div 6\\
\frac{x}{6}+4 &= \sqrt[3]{r^2} && \mid \text{hoch } 3\\
\left(\frac{x}{6}+4\right)^3 &= r^2 && \mid \text{Wurzel}\\
\sqrt{\left(\frac{x}{6}+4\right)^3} &= r
\end{aligned}$$

$K(x)=8\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{6}+4\right)^3}$

$G(x)=20x-8\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{6}+4\right)^3}$

c) Notwendige Bedingung:
$$\begin{aligned}
0=G'(x) &= 20-2\cdot\sqrt{\frac{x}{6}+4} && \mid +2\cdot\sqrt{\tfrac{x}{6}+4}\\
2\cdot\sqrt{\frac{x}{6}+4} &= 20 && \mid \div 2\\
\sqrt{\frac{x}{6}+4} &= 10 && \mid \text{hoch } 2\\
\frac{x}{6}+4 &= 100 && \mid -4\\
\frac{x}{6} &= 96 && \mid \cdot 6\\
x &= 576
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:
$G''(x)=-\dfrac{1}{6\cdot\sqrt{\frac{x}{6}+4}} <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x=576$ glob. Max
Gewinn-maximale Menge 576 ME

Lösungsweg zu Aufgabe 8.5:
$f'(x)=x^2-x-2$
$f''(x)=2x-1$
$f'''(x)=2$

1. Extremstellen:
   Notwendige Bedingung:
   $0=f'(x)=x^2-x-2\Rightarrow x=-1$ oder $x=2$

Hinreichende Bedingung:
$f''(-1) = -3 < 0$ d.h. $x = -1$ lokales Maximum
$f''(2) = 3 > 0$ d.h. $x = 2$ lokales Minimum

2. Wendestellen:
   Notwendige Bedingung:
   $0 = f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow x = 0{,}5$
   Hinreichende Bedingung:
   $f'''(0{,}5) = 2 \neq 0$ d.h. $x = 0{,}5$ Wendestelle

3. Sattelstellen:
   $f'(0{,}5) \neq 0$ d.h. es gibt keine Sattelstellen.

Lösungsweg zu Aufgabe 8.6:
$f'(x) = x^2 - 4x + 4$
$f''(x) = 2x - 4$
$f'''(x) = 2$

1. Extremstellen:
   Notwendige Bedingung:
   $0 = f'(x) = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2$
   Hinreichende Bedingung:
   $f''(2) = 0$
   d.h. mit unseren Sätzen können wir keine Aussage über Extremstellen machen

2. Wendestellen:
   Notwendige Bedingung:
   $0 = f''(x) = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2$
   Hinreichende Bedingung:
   $f'''(2) = 2 \neq 0$ d.h. $x = 2$ Wendestelle

3. Sattelstellen:
   $f'(2) = 0$ d.h. $x = 2$ ist sogar eine Sattelstelle

Lösungsweg zu Aufgabe 8.7:
Auf $(-\infty; 0]$ ist die Funktion konkav, auf $[0; \infty)$ ist die Funktion konvex.

Bei c) ist die Wölbung genau umgekehrt.

Bei d) und e) wechselt die Funktion ihr Krümmungsverhalten nicht in $x = 0$. (Sondern in $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$)

Bei a) verläuft die Funktion nicht durch den Punkt (0;0).

Also ist die gesuchte Funktion b).

Lösung zu Aufgabe 8.8

Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten	Grenzkosten
4	1 000	4 000	4 000	2 500	1 500	4	1,5	4

a) variable Kosten = Kosten minus Fixkosten = 1 500 GE
Output x = variable Kosten $\div$ variable Stückkosten = 1 000 ME
d.h. der Output beträgt 1 000 ME.

b) Preis $p(1\,000)$ = Umsatz $\div$ Output = 4 GE
Stückkosten = Kosten $\div$ Output = 4 GE
d.h. das Betriebsoptimum beträgt 4 GE.

c) Die Grenzkosten von 4 GE ergeben sich gemäß der Quotientenregel aus der Gleichheit von Grenzkosten und Stückkosten in der Betriebsoptimums-Stelle $x = 1\,000$ (vgl. Arrenberg[2015]: Wirtschaftsmathematik für Bachelor, Satz 7.41 und Beispiel 7.49):

$$K'(1\,000) = \frac{K(1\,000)}{1\,000} = k(1\,000) = 4 \text{ GE}$$

Zusammenfassung

Eigenschaft	Überprüfung
f monoton steigend in $[a;b]$	$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a;b)$
f monoton fallend in $[a;b]$	$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a;b)$
x_0 lokale Minimalstelle	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$
x_0 lokale Maximalstelle	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$
x_0 globale Minimalstelle in $[a;b]$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a;b)$
x_0 globale Maximalstelle in $[a;b]$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a;b)$
x_0 Wendestelle	$f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$
x_0 Sattelstelle	$f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$ $f'(x_0) = 0$