Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übung zu QM III

Normalverteilung

Aufgabe 10.1
Die Lebensdauer (in Jahren) von KFZ-Batterien des Typs „Bleinix" ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 2$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Batterie eine Lebensdauer von mehr als drei Jahren erreicht? (*Lösung*: 0,023)

Aufgabe 10.2
JAHN REISEN ist ein Unternehmen der LTU-Gruppe, das Pauschaltouristen u.a. mit Flugzeugen vom Typ „Airbus A330-300" wöchentlich zweimal (donnerstags und samstags) vom Flughafen „Düsseldorf-Lohausen" (DUS) zum Flughafen „Teneriffa-Süd" (TFS) befördert. In den Katalogen von JAHN REISEN wird der Airbus A330-330 vorgestellt:

- Anzahl der Maschinen: sechs
- Triebwerke: zwei Pratt & Whitney PW 4168
- Triebwerksschub: $2 \cdot 302\,000$ N
- Maximale Reichweite: 8 700 km
- Tankinhalt: 97 170 Liter
- Reisegeschwindigkeit: 860 km/h
- Maximale Flughöhe: 12 500 m
- Maximale Flugmasse: 212 000 kg
- Sitzabstand: ca. 82 cm
- Fluggastplätze: 387 Y
- Flugdeckbesatzung: zwei
- Kabinenbesatzung: neun

Aus der Erfahrung von sehr vielen Charterflügen von DUS nach TFS weiß LTU, dass der Kraftstoffverbrauch (in Litern Kerosin pro 100 km) beim Airbus A330- 300 als näherungsweise normalverteilt angesehen werden kann mit einem Erwartungswert 845 und und einer Standardabweichung von 25.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kerosinverbrauch je 100 km bei einem Charterflug von DUS nach TFS
   a.1) mindestens 895 Liter beträgt? (*Lösung*: 0,023)
   a.2) höchstens 870 Liter beträgt? (*Lösung*: 0,841)
   a.3) genau 820 Liter beträgt? (*Lösung*: null)
   a.4) zwischen 795 und 895 Litern liegt? (*Lösung*: 0,954)

b) LTU möchte wissen, mit welchem Kerosinverbrauch in der allergrößten Zahl der Charterflüge zu rechnen ist, d. h. wie hoch der Kerosinverbrauch (je 100 km) ist, der in 99% aller Charterflüge von DUS nach TFS erreicht oder übertroffen wird. (*Lösung*: $x = 786{,}8425$)

c) Bei den letzten zehn Charterflügen von DUS nach TFS registrierten die Wartungstechniker von LTU in allen zehn Fällen einen Kerosinverbrauch je 100 km, der mehr oder weniger unter dem bisherigen mittleren Verbrauch von 845 Litern je 100 km lag. Welchen Schluss werden die Wartungstechniker von LTU Ihrer Meinung nach daraus gezogen haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10.3
Die jährliche Durchschnittstemperatur (in Grad Celsius) in Aserbaidschan lässt sich als eine normalverteilte Zufallsvariable X mit den Parametern $\mu_X = 12$ Grad und $\sigma_X = 2$ Grad ansehen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im kommenden Jahr die Durchschnittstemperatur zwischen 11° und 14° liegt? (*Lösung*: 0,532)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im kommenden Jahr die Durchschnittstemperatur mindestens 11° beträgt? (*Lösung*: 0,691)

c) Nehmen Sie an, dass die Jahresdurchschnittstemperaturen stochastisch unabhängig voneinander sind. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit,

   1. dass die Jahresdurchschnittstemperatur zwei Jahre hintereinander mindestens 11° beträgt? (*Lösung*: 0,477)
   2. dass in den nächsten fünf Jahren die Jahresdurchschnittstemperatur genau dreimal mindestens 11° beträgt? (*Lösung*: 0,315)

d) Welche Jahresdurchschnittstemperatur wird im kommenden Jahr mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 höchstens erreicht? (*Lösung*: $x = 15{,}3°$)

Aufgabe 10.4
Schauen Sie sich im Internet das folgende Applet über die Dichtefunktion der Normalverteilung an. Sie gelangen zu dem Applet wie folgt:

http://www.intmath.com/counting-probability/normal-distribution-graph-interactive.php

Verfolgen Sie, wie sich die Dichte in Abhängigkeit der Parameter μ und σ verändert.

Lösung zu Aufgabe 10.1:
X=Lebensdauer (in Jahren) einer Batterie
$X \sim \mathsf{NV}(\mu = 2; \sigma = 0{,}5)$
$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_U\left(\frac{3-2}{0{,}5}\right) = 1 - F_U(2) = 1 - 0{,}977 = 0{,}023$

Lösung zu Aufgabe 10.2:
X=Kerosinverbrauch auf 100 km in l
$X \sim \mathsf{NV}(\mu = 845; \sigma = 25)$

a) 1. $P(X \geq 895) = 1-P(X < 895) = 1-P(X \leq 895) = 1-F_U\left(\frac{895-845}{25}\right) = 1 - F_U(2) = 1 - 0{,}977 = 0{,}023$
   2. $P(X \leq 870) = F_U\left(\frac{870-845}{25}\right) = F_U(1) = 0{,}841$
   3. $P(X = 820) = 0$
   4. $P(X \leq 895) - P(X \leq 795) = 0{,}977 - F_U\left(\frac{795-845}{25}\right) = 0{,}977 - F_U(-2) = 0{,}977 - 0{,}023 = 0{,}954$

b) $0{,}01 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x-845}{25}\right)$
   $-2{,}3263 = \frac{x-845}{25} \Leftrightarrow x = 845 - 2{,}3263 \cdot 25 = 786{,}8$

c) $P(X < 845) = P(X < \mu) = 0{,}5$
   Y=Anzahl der Flüge, bei denen der Verbrauch unter 845 Liter liegt
   $Y \sim \mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}5)$
   $P(Y = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^{0} = \frac{1}{1\,024} = 0{,}001$
   Diese Wahrscheinlichkeit ist so gering, dass zu vermuten ist, dass der Erwartungswert kleiner ist als 845 Liter.

Lösung zu Aufgabe 10.3:
X = Jahresdurchschnittstemperatur (in Grad Celsius)
$X \sim \mathsf{NV}(\mu = 12; \sigma = 2)$

a) $P(X \leq 14) - P(X \leq 11) = F_U\left(\frac{14-12}{2}\right) - F_U\left(\frac{11-12}{2}\right) = F_U(1) - F_U(-0{,}5) = 0{,}841 - 0{,}309 = 0{,}532$

b) $P(X \geq 11) = 1 - P(X < 11) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - 0{,}309 = 0{,}691$

c) Y=Anzahl der Jahre, in denen die Jahresdurchschnittstemperatur mindestens 11 Grad Celsius beträgt
   $Y \sim \mathsf{B}(n; p = 0{,}691)$

1. $n = 2$
   $P(Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}691^2 \cdot 0{,}309^0 = 0{,}478$
2. $n = 5$
   $P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}691^3 \cdot 0{,}309^2 = 0{,}315$

d) $0{,}95 = P(X \leq x) \Leftrightarrow 1{,}6449 = \dfrac{x - 12}{2} \Leftrightarrow x = 15{,}3$

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übung zu QM III

Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 10.5
Ein Reiseveranstalter bietet für eine Flusskreuzfahrt drei unterschiedliche Tickets an. Der Gewinn des Reiseveranstalters hängt unter anderem von der Ticketart ab. Folgende Anteile sind aus Erfahrung bekannt:

- 50% der Gäste sind Frühbucher. Der Gewinn pro Frühbucher beträgt 5 GE.
- 30% der Gäste zahlen den Normalpreis, der einen Gewinn von 10 GE pro verkauften Ticket bringt.
- Der Rest der Gäste erhält ein ermäßigtes Ticket, das einen Gewinn von 2 GE pro verkauftem Ticket bringt.

a) Betrachten Sie die Zufallsvariable X=„Gewinn (in GE) pro Ticket“.

1. Berechnen Sie den erwarteten Gewinn pro Ticket.
2. Berechnen Sie die Varianz von X.

b) Wie hoch ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass bei 400 Gästen der Gesamtgewinn über 2 400 GE liegt?

c) Welcher Gewinn wird näherungsweise bei 400 Gästen mit der Wahrscheinlichkeit von 95% überschritten?

Aufgabe 10.6
Bei einem Automatenspiel beträgt der Einsatz pro Spiel ein Euro. Der Automat wirft bei einem Spiel aus

- zwei Euro mit der Wahrscheinlichkeit 0,3
- ein Euro mit der Wahrscheinlichkeit 0,2
- gar nichts mit der Wahrscheinlichkeit 0,5.

a) Wie groß ist der erwartete Gewinn bei 100 Spielen?

b) Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, bei 100 Spielen weniger als fünf Euro zu verlieren?

Aufgabe 10.7
Der Anteil der Bevölkerung, der die Hamburger Band „Fettes Brot“ kennt, beträgt 1%. An einer Betriebsweihnachtsfeier nehmen 1200 Personen teil. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den Gästen

a) höchstens zehn Kenner der Band befinden?

b) weniger als zehn Kenner der Band befinden?

c) genau zehn Kenner der Band befinden?

Lösung zu Aufgabe 10.5:
X=Gewinn (in GE pro Ticket)

x	2	5	10
$P(X=x)$	0,2	0,5	0,3

a) 1. $E[X] = 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}3 = 5{,}9$

   2. $V[X] = (2-5{,}9)^2 \cdot 0{,}2 + (5-5{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (10-5{,}9)^2 \cdot 0{,}3 = 8{,}49$

b) Faustregel für ZGWS: $n = 400 \geq 30$ ist erfüllt
$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} > 2\,400) = 1 - P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} \leq 2\,400) \approx 1 - F_U\left(\frac{2\,400 - 400 \cdot 5{,}9}{\sqrt{400 \cdot 8{,}49}}\right) = 1 - F_U(0{,}6864) = 1 - 0{,}754 = 0{,}246$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 25%.

c) $0{,}05 = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} \leq x) = F_U\left(\frac{x - 400 \cdot 5{,}9}{\sqrt{400 \cdot 8{,}49}}\right)$
$\Leftrightarrow -1{,}6449 = \frac{x - 400 \cdot 5{,}9}{\sqrt{400 \cdot 8{,}49}} \Leftrightarrow x = 400 \cdot 5{,}9 - 1{,}6449 \cdot \sqrt{400 \cdot 8{,}49} = 2\,264{,}143$
d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt der Gewinn über etwa 2 264 GE.

Lösung zu Aufgabe 10.6:
X=Gewinn (in Euro) bei einem Spiel

Wkt.	0,5	0,2	0,3
Auswurf in Euro	0	1	2
Gewinn in Euro	-1	0	1

a) E$[X]$=$(-1) \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 = -0{,}2$
d.h. bei einem Spiel muss man mit einem Verlust von 20 Cent rechnen
d.h. bei 100 Spielen muss man mit einem Verlust von 20 Euro rechnen

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= (-1-(-0{,}2))^2 \cdot 0{,}5 + (0-(-0{,}2))^2 \cdot 0{,}2 + (1-(-0{,}2))^2 \cdot 0{,}3 \\ &= 0{,}64 \cdot 0{,}5 + 0{,}04 \cdot 0{,}2 + 1{,}44 \cdot 0{,}3 \\ &= 0{,}76 \end{aligned}$$

b) X_i=Gewinn (in Euro) beim $i-$ten Spiel; $i = 1, \ldots, 100$
$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > -5\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq -5\right) \approx_{\text{ZGWS}} 1 - F_U\left(\frac{-5-(-20)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}76}}\right) = 1 - F_U(1{,}7206) = 1 - 0{,}957 = 0{,}043$

Lösung zu Aufgabe 10.7:
Auswahlsatz $= \frac{1\,200}{82\,000\,000} \leq 0{,}05$
X= Anzahl der Kenner
$X \sim \mathsf{B}(n = 1200; p = 0{,}01)$
E$[X]$=np=12
Var$[X]$=$np(1-p) = 12 \cdot 0{,}99 = 11{,}88$

Da n groß ist, überprüfen wir noch die Faustregel für die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung:

$np = 12 \geq 10 \qquad$ o.k.

$n(1-p) = 1\,200 \cdot 0{,}99 = 1\,188 \geq 10 \qquad$ o.k.

a) $P(X \leq 10) \approx_{\text{ZGWS}} F_U\left(\dfrac{10 + 0{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}88}}\right) = F_U(-0{,}4352) \approx 0{,}332$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X \leq 10$ über die Binomialverteilung berechnet, so ergibt sich:
$P(X \leq 10) = 0{,}346$

b) $P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx_{\text{ZGWS}} F_U\left(\dfrac{9 + 0{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}88}}\right) = F_U(-0{,}7253) \approx 0{,}234$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X \leq 9$ über die Binomialverteilung berechnet, so ergibt sich:
$P(X \leq 9) = 0{,}241$

c) $P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) \approx_{\text{ZGWS}} 0{,}332 - 0{,}234 = 0{,}098$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X = 10$ über die Binomialverteilung berechnet, so ergibt sich:
$P(X = 10) = 0{,}105$

Die Wahrscheinlichkeiten sind so unterschiedlich, da die Binomialverteilung mit $p = 0{,}01$ eine schiefe Verteilung ist, die durch die symmetrische Normalverteilung angenähert werden soll.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM III

Arbeitsblatt

Beispiel (11.02.2005)
Ein Versicherungsvertreter weiß aufgrund seiner langjährigen Erfahrung, dass 41% der neu abgeschlossenen Versicherungsverträge noch während der Rücktrittsfrist von den Kunden gekündigt werden.

1. An einem Tag hat der Versicherungsvertreter fünf Versicherungsverträge abgeschlossen.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Versicherungsverträge des Tages erfüllt, d.h. nicht gekündigt werden?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der Versicherungsverträge erfüllt werden?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei der Versicherungsverträge erfüllt werden?
2. In einem Monat hat der Versicherungsvertreter 85 Versicherungsverträge abgeschlossen. Er erhält eine Sonderprämie, wenn er im Monat 50 Versicherungsverträge abschließt, die nicht während der Rücktrittsfrist gekündigt werden.
   a) Kann der Versicherungsvertreter damit rechnen, in diesem Monat die Sonderprämie zu bekommen?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsvertreter in diesem Monat die Sonderprämie erhält?