

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 3914
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zu QM II

Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 2.1

In einer Stadt lesen 20% der Einwohner den *Spiegel* und 15% der Einwohner den *Focus*. Insgesamt 5% der Einwohner lesen sogar beide Zeitungen. Wie viel Prozent der Einwohner lesen

- mindestens eine der beiden Zeitungen?
- höchstens eine der beiden Zeitungen?
- genau eine der beiden Zeitungen?
- keine der beiden Zeitungen?

Aufgabe 2.2

Bei einer Marktforschungsumfrage kannten von den befragten Jugendlichen 10% das Samsung GALAXY S4, 40% das iPhone 5 und 42% kannten mindestens eines der beiden Mobiltelefone. Wie viel Prozent der befragten Jugendlichen kannten beide Mobiltelefone?

Aufgabe 2.3

Betrachten Sie ein Würfelspiel mit zwei unterscheidbaren Würfeln.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit beiden Würfeln mindestens einmal eine Vier zu würfeln?
- Berechnen Sie für die Ereignisse
 $E_i = \text{„Unterschied der beiden Augenzahlen beträgt } i\text{“}$
die Wahrscheinlichkeiten $P(E_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit beiden Würfeln der Unterschied der beiden Augenzahlen
 - größer als drei ist?
 - zwischen eins und fünf liegt (eins und fünf ausgeschlossen)?
 - gerade ist?
- Betrachten Sie die Ereignisse
 $M_i = \text{„das Minimum der beiden Augenzahlen beträgt } i\text{“}$
Das Minimum des Wurfs (5;4) beträgt 4, das Minimum des Wurfs (4;4) beträgt ebenfalls 4. Berechnen Sie für alle $i \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeiten $P(M_i)$.

Aufgabe 2.4

Gehen Sie ins Internet und loggen sich unter <http://math.uww.edu/faculty/mcfarlat/> auf der Homepage von Prof. McFarland's an der Fakultät Mathematical and Computer Sciences der University Wisconsin Whitewater ein. Dort angekommen rufen Sie das Skript *Math 143*

auf. Unter „Venn Diagramms“ stehen drei interaktive Aufgaben, die Sie bitte bearbeiten.
Sie können sich auch gleich einloggen unter <http://math.uww.edu/faculty/mcfarlat/143.htm>

Aufgabe 2.5

Applet Münzwurf

Setzen Sie sich an einen TH-PC im Rechnerraum 138 oder bearbeiten Sie diese Aufgabe zu Hause an Ihrem Rechner:

1. https://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_10_prob.html
2. Probability of Heads = 0.5
3. Number of Tosses = 15, 100, 200
4. Haken bei „Show true probability“
5. TOSS anklicken
Beobachten Sie, wie sich der Anteil der Würfe mit „Kopf oben“ langsam auf 0,5 stabilisiert.

Aufgabe 2.6 (vgl. Süddeutsche vom 08.02.2017)

Laut Aussage des schwedischen Arztes Hans Rosling, dem Gründer der Gapminder-Stiftung, sind 21% der Weltbevölkerung ohne Glühbirnen, also ohne elektrisches Licht. Und 22% der Weltbevölkerung besitzt eine Waschmaschine. Jeder, der eine Waschmaschine hat, besitzt auch Glühbirnen.

Wie viel Prozent der Weltbevölkerung haben

- a) weder Glühbirnen noch Waschmaschinen?
- b) zwar Glühbirnen, jedoch keine Waschmaschine?

Lösung zu Aufgabe 2.1

S =zufällig ausgewählter Einwohner liest den Spiegel

F =zufällig ausgewählter Einwohner liest den Focus

Arbeitstabelle:

	S	\bar{S}	
F	0,05	0,10	0,15
\bar{F}	0,15	0,70	0,85
	0,20	0,80	1

- a) $P(S \cup F) = 1 - P(\bar{S} \cap \bar{F}) = 1 - 0,7 = 30\%$
 b) $P(\bar{S} \cup \bar{F}) = 1 - P(S \cap F) = 1 - 0,05 = 95\%$
 c) $P(\bar{S} \cap F) + P(S \cap \bar{F}) = 0,10 + 0,15 = 25\%$
 d) $P(\bar{S} \cap \bar{F}) = 70\%$

Lösung zu Aufgabe 2.2

S =zufällig ausgewählter Jugendlicher kennt das Samsung GALAXY S4

I =zufällig ausgewählter Jugendlicher kennt das iPhone 5

Arbeitstabelle:

	S	\bar{S}	
I	0,08	0,32	0,40
\bar{I}	0,02	0,58	0,60
	0,10	0,90	1

$P(S \cap I) = 8\%$

Lösung zu Aufgabe 2.3

Um Wahrscheinlichkeiten gemäß Laplace berechnen zu können, müssen zunächst alle Ergebnisse so aufgeschrieben werden, dass jedes Ergebnis die gleiche Chance hat. Es ergeben sich insgesamt 36 mögliche Ergebnisse (Ziehen von $k=2$ Kugeln aus $n=6$ Kugeln mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge ergibt $\#S = n^k = 6^2 = 36$). Jedes dieser 36 Ergebnisse hat die Chance $1/36$.

Die Menge der möglichen Ergebnisse für die Augenzahl beim ersten Wurf und für die Augenzahl beim zweiten Wurf lautet:

$$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ \vdots \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

d.h. $\#S = 36$, also gibt es 36 mögliche Ergebnisse, die alle gleich möglich sind.

- a) A = „mindestens eine Vier“
 $= \{ (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (4, 6), (4, 5), (4, 3), (4, 2), (4, 1) \}$
 $P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{11}{36}$

- b) E_0 = Unterschied der beiden Augenzahlen beträgt null=alle Pässe=(1,1) oder (2,2) oder (3,3) oder (4,4) oder (5,5) oder (6,6); d.h. insb. $\#E_0 = 6$ und $P(E_0) = \#E_0/\#S = 6/36$.

E_1 =Unterschied der beiden Augenzahlen beträgt eins= (1,2) oder (2,3) oder (3,4) oder (4,5) oder (5,6) oder (6,5) oder (5,4) oder (4,3) oder (3,2) oder (2,1); d.h. insb. $\#E_1 = 10$ und $P(E_1) = \#E_1/\#S = 10/36$.

E_2 =Unterschied der beiden Augenzahlen beträgt zwei=(1,3) oder (2,4) oder (3,5) oder (4,6) oder (6,4) oder (5,3) oder (4,2) oder (3,1); d.h. insb. $\#E_2 = 8$ und $P(E_2) = \#E_2/\#S = 8/36$.

Usw.

i	0	1	2	3	4	5
$P(E_i)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

- c) 1. $B =$ „Unterschied ist größer als drei“ = „Unterschied der beiden Augenzahlen beträgt entweder genau vier oder genau fünf“ = $E_4 \cup E_5$
 $P(B) = P(E_4 \cup E_5) = P(E_4) + P(E_5) = \frac{4+2}{36} = \frac{1}{6}$
2. $C =$ „Unterschied liegt zwischen eins und fünf“ = „Unterschied der beiden Augenzahlen beträgt entweder genau zwei oder genau drei oder genau vier“ = $E_2 \cup E_3 \cup E_4$
 $P(C) = P(E_2 \cup E_3 \cup E_4) = P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = \frac{8+6+4}{36} = 0,5$
3. $D =$ „Unterschied ist gerade“=„Unterschied der beiden Auganzahlen ist entweder 0 oder 2 oder 4“
 $P(D) = P(E_0) + P(E_2) + P(E_4) = \frac{6+8+4}{36} = \frac{1}{2}$
da insb. die Zahl Null eine gerade Zahl ist.
- d) $M_1 =$ Das Minimum der beiden Augenzahlen beträgt genau dann eins, wenn Folgendes gewürfelt wird: (1,1) oder (1,2) oder (1,3) oder (1,4) oder (1,5) oder (1,6) oder (6,1) oder (5,1) oder (4,1) oder (3,1) oder (2,1).

$M_2 =$ Das Minimum der beiden Augenzahlen beträgt genau dann zwei, wenn Folgendes gewürfelt wird: (2,2) oder (2,3) oder (2,4) oder (2,5) oder (2,6) oder (6,2) oder (5,2) oder (4,2) oder (3,2).

$M_3 =$ Das Minimum der beiden Augenzahlen beträgt genau dann drei, wenn Folgendes gewürfelt wird: (3,3) oder (3,4) oder (3,5) oder (3,6) oder (6,3) oder (5,3) oder (4,3).

Usw.

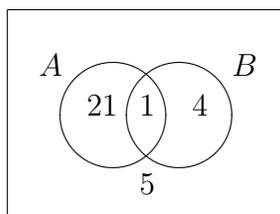
i	1	2	3	4	5	6
$P(M_i)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Lösung zu Aufgabe 2.4

A = Studierender benutzt PC

B = Studierender benutzt Mac

S



Gegeben sind die Anzahlen:

$$n = 31 \text{ insgesamt}$$

$$25 = \#(A \setminus B) + \#(B \setminus A)$$

$$22 = \#(A)$$

$$5 = \#(\overline{A \cap B})$$

Lösung zu Aufgabe 2.6

G = zufällig ausgewählter Einwohner besitzt eine Glühbirne

W = zufällig ausgewählter Einwohner besitzt eine Waschmaschine

Arbeitstabelle:

	W	\overline{W}	
G	0,22	0,57	0,79
\overline{G}	0	0,21	0,21
	0,22	0,78	1

a) $P(\overline{G} \cap \overline{W}) = 0,21$

d.h. 21% der Weltbevölkerung haben weder Glühbirnen noch Waschmaschinen.

b) $P(G \cap \overline{W}) = 0,57$

d.h. 57% der Weltbevölkerung haben zwar eine Glühbirne, aber keine Waschmaschine.

Vorlesung QM II
 Arbeitsblatt

Beispiel 1

Bei einer Umfrage gaben

- 5% aller Befragten an, sowohl Kaffee als auch Honig zum Frühstück zu konsumieren
- 20% aller Befragten an, weder Kaffee noch Honig zum Frühstück zu konsumieren
- 30% aller Befragten an, keinen Kaffee zum Frühstück zu trinken

Wie viel Prozent aller Befragten konsumieren

- a) mindestens eines der beiden Lebensmittel zum Frühstück?
- b) genau eines der beiden Lebensmittel zum Frühstück?
- c) höchstens eines der beiden Lebensmittel zum Frühstück?
- d) Honig zum Frühstück?
- e) zwar Honig, aber keinen Kaffee zum Frühstück?

Lösung

K = zufällig ausgewählte Person trinkt Kaffee zum Frühstück

H = zufällig ausgewählte Person isst Honig zum Frühstück

Arbeitstabelle:

	K	\bar{K}	
H			
\bar{H}			
			1

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Beispiel 2

In einer Umfrage gaben

- 60% aller Befragten an, ein iPod zu besitzen
- 10% aller Befragten an, kein Handy zu besitzen
- 98% aller Befragten an, mindestens eines der beiden Geräte zu besitzen

Wie viel Prozent aller Befragten besitzen

- a) beide Geräte?
- b) zwar ein Handy, aber kein iPod?
- c) genau eines der beiden Geräte?

Lösung

I = zufällig ausgewählte Person besitzt ein iPod

H = zufällig ausgewählte Person besitzt ein Handy

Arbeitstabelle:

	I	\bar{I}	
H			
\bar{H}			
			1

- a)
- b)
- c)

Lösung zu Beispiel 1

K = zufällig ausgewählte Person trinkt Kaffee zum Frühstück

H = zufällig ausgewählte Person isst Honig zum Frühstück

Arbeitstabelle:

	K	\bar{K}	
H	0,05	0,10	0,15
\bar{H}	0,65	0,20	0,85
	0,70	0,30	1

a) $P(H \cup K) = 1 - 0,20 = 0,80$

b) $P(H \cap \bar{K}) + P(\bar{H} \cap K) = 0,10 + 0,65 = 0,75$

c) $P(\bar{H} \cup \bar{K}) = 1 - 0,05 = 0,95$

d) $P(H) = 0,15$

e) $P(H \cap \bar{K}) = 0,10$

Lösung zu Beispiel 2

I = zufällig ausgewählte Person besitzt ein iPod

H = zufällig ausgewählte Person besitzt ein Handy

Arbeitstabelle:

	I	\bar{I}	
H	0,52	0,38	0,90
\bar{H}	0,08	0,02	0,10
	0,60	0,40	1

a) $P(H \cap I) = 0,52$

b) $P(H \cap \bar{I}) = 0,38$

c) $P(H \cap \bar{I}) + P(\bar{H} \cap I) = 0,38 + 0,08 = 0,46$

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
Email: jutta.arrenberg@th-koeln.de
Homepage: <http://fh-koeln.arrenberg.com/>

Übung QM II

Aufgabe

Ermitteln Sie den Bekanntheitsgrad der drei Produkte A, B, C . Eine Umfrage ergab folgende Werte:

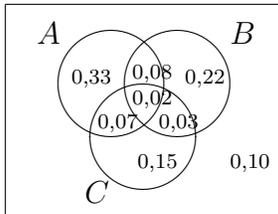
- 10 % aller Befragten kannten beide Produkte A und B
- 2 % aller Befragten kannten alle drei Produkte
- 33 % aller Befragten kannten nur Produkt A
- 22 % aller Befragten kannten nur Produkt B
- 15 % aller Befragten kannten nur Produkt C
- 5 % aller Befragten kannten beide Produkte B und C
- 9 % aller Befragten kannten beide Produkte A und C

a) Welches der drei Produkte hat den größten Bekanntheitsgrad?

b) Wie viel Prozent der Befragten kannten keines der drei Produkte?

Lösung:

Venn-Diagramm



- a) 50 % aller Befragten kannten Produkt *A*.
35 % aller Befragten kannten Produkt *B*.
27 % aller Befragten kannten Produkt *C*.
Somit hat Produkt *A* den größten Bekanntheitsgrad.
- b) 10 % aller Befragten kannten keines der drei Produkte.