Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 3.1

a) Bei einer Befragung stellt sich heraus, dass
- 20% aller Befragten Nichtraucher sind
- 60% aller Befragten Raucher und Kaffeetrinker sind
- 90% der Kaffeetrinker rauchen

1. Stellen Sie die oben beschriebenen Sachverhalte durch Wahrscheinlichkeiten dar.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter den Rauchern einen Kaffeetrinker zu finden?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einer Person keinen Kaffeetrinker zu finden?

b) Nehmen Sie an, dass der Anteil der Raucher 80% und der Anteil der Kaffeetrinker $66{,}\overline{6}\%$ betragen und dass die Ereignisse „Rauchen“ und „Kaffeetrinken“ stochastisch unabhängig sind. Wie groß ist unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einer Person einen nichtrauchenden Kaffeetrinker zu finden?

Aufgabe 3.2 (Süddeutsche Zeitung vom 22.04.2008, Seite 18)
In der BRD sind 700 000 Menschen an Alzheimer erkrankt. Der neue Bluttest NuroPro einer Firma in Texas deckte in einem Probelauf mit 200 Probanden 64% aller Alzheimer-Kranken auf und schloss bei ebenfalls 64% aller Gesunden eine Alzheimererkrankung aus.

Wie viel Prozent der Patienten, bei denen aufgrund des Bluttest eine Alzheimer-Erkrankung diagnostiziert wurde, sind tatsächlich an Alzheimer erkrankt?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die BRD 82 Mio. Einwohner hat, d.h. $P(A) = 700\,000 \div 82\,000\,000$

Aufgabe 3.3

In einem Unternehmen werden Werkstücke auf zwei Maschinen hergestellt.
Maschine 1 mit einem Anteil von 40% an der Gesamtproduktion arbeitet mit einer Ausschussquote von 6%.
Maschine 2 liefert den Rest der Gesamtproduktion; ihre Ausschussquote beträgt 3%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) ... ein zufällig aus der Gesamtproduktion herausgegriffenes Werkstück der Norm entspricht, d. h. ein Qualitätsstück ist?

b) ... ein Ausschussstück auf Maschine 2 gefertigt wurde?

c) ... ein Werkstück, das auf Maschine 1 gefertigt wurde, der Norm entspricht?

Aufgabe 3.4
Ein Unternehmen fertigt seine Güter (Elektrogeräte) neben den üblichen Wochentagen Montag bis Freitag auch am Wochenende (Samstag, Sonntag). Am Wochenende liegt die Ausschussrate bei jeweils 7%, montags liegt die Ausschussrate bei 10%, an den restlichen Wochentagen bei jeweils 5%. Am Samstag und am Sonntag werden jeweils 10% aller Güter gefertigt, die restlichen 80% der Produktion verteilen sich gleichmäßig über die übrigen Wochentage (16% pro Tag).

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten Gerät um Ausschuss handelt.

2. Ein Produktionsstück ist Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Montag hergestellt wurde?

Aufgabe 3.5
Bei einer Umfrage des Instituts für Demoskopie in Allensbach über Gesundheitsfragen zeigten sich folgende Ergebnisse über Probleme mit dem Einschlafen:

a)
- 77% aller Befragten gaben an, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 38% aller Befragten waren Männer, die angaben, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 13% aller Befragten waren Frauen, die angaben, nur schwer einschlafen zu können.

Füllen Sie bitte die folgende Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut			
Nur schwer			
Zusammen			

b)
- 77% aller Befragten gaben an, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;

- 38% aller Befragten waren Männer, die angaben, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- $56,5217\%$ der Befragten, die nur schwer einschlafen können, waren Frauen.

Füllen Sie bitte die folgende Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut			
Nur schwer			
Zusammen			

c)
- 77% aller Befragten gaben an, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 38% aller Befragten waren Männer, die angaben, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 25% aller befragten Frauen gaben an, nur schwer einschlafen zu können.

Füllen Sie bitte die folgende Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut			
Nur schwer			
Zusammen			

Aufgabe 3.6
Applet *Bedingte Wahrscheinlichkeit* der Universität in Berkeley (Kalifornien)
Setzen Sie sich an einen TH-PC im Rechnerraum 138 oder bearbeiten Sie diese Aufgabe zu Hause an Ihrem Rechner:

1. *https://www.stat.berkeley.edu/∼stark/Java/Html/Venn3.htm*

2. Es wird das Java-Applet *SticiGui* gestartet.

3. In Abweichung von unseren Bezeichnungen gilt für dieses Applet: $AB = A \cap B$ und $A^c = \overline{A}$.

4. Lassen Sie sich im Venndiagramm die Wahrscheinlichkeiten der vorgeschlagenen Ereignisse anzeigen.

Falls die Sicherheitstufe von JAVA das Abspielen des Applets verhindert, fügen Sie bitte die JAVA-Ausnahme *https://www.stat.berkeley.edu* in der Systemsteuerung unter Sichheit von JAVA ein.

Aufgabe 3.7
Melden Sie sich im Netz an der University of Alabama in Huntsville an. Bearbeiten Sie die interaktive Aufgabe

14. Open the conditional probability experiment

zu bedingten Wahrscheinlichkeiten:

https://www.randomservices.org/random/prob/Conditional.html

Lösung von Aufgabe 3.1
R = Raucher
K = Kaffeetrinker

a) 1. $0{,}20 = P(\overline{R})$
$0{,}60 = P(R \cap K)$
$0{,}90 = P(R \mid K)$

2.

	R	$\overline{R}$	
K	3/5	1/15	2/3
$\overline{K}$	1/5	2/15	1/3
	4/5	1/5	1

bzw.

	R	$\overline{R}$	
K	0,6	0,07	0,67
$\overline{K}$	0,2	0,13	0,33
	0,8	0,2	1

$P(K \mid R) = 0{,}75$

3. $P(\overline{K}) = \frac{1}{3}$

b)

	R	$\overline{R}$	
K	8/15	2/15	2/3
$\overline{K}$	4/15	1/15	1/3
	4/5	1/5	1

$P(\overline{R} \cap K) = \frac{2}{15}$

Lösung von Aufgabe 3.2
A = Alzheimer
T = Bluttest ist positiv
Gegeben sind die folgenden Anteile:
$P(A) = \frac{700\,000}{82\,000\,000} = 0{,}0085$
$P(T \mid A) = 0{,}64$
$P(\overline{T} \mid \overline{A}) = 0{,}64$
Daraus lassen sich die folgenden Anteile berechnen:
$P(A \cap T) = 0{,}64 \cdot 0{,}0085 = 0{,}0055$
$P(\overline{A} \cap \overline{T}) = 0{,}64 \cdot 0{,}9915 = 0{,}6345$
Jetzt können wir die Arbeitstabelle aufstellen:

	A	$\overline{A}$	
T	0,0055	0,3570	0,3625
$\overline{T}$	0,0030	0,6345	0,6375
	0,0085	0,9915	1

Gesucht wird: $P(A \mid T) =?$

$$P(A \mid T) = \frac{0{,}0055}{0{,}3625} = 0{,}015$$

d.h. lediglich 1,5% der Patienten, bei denen der Bluttest eine Alzheimererkrankung diagnostiziert, haben tatsächlich Alzheimer.

Lösung von Aufgabe 3.3
B = Stück wird auf Maschine M_1 hergestellt
$\overline{B}$ = Stück wird auf Maschine M_2 hergestellt
A = Stück ist Ausschuss
Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten:
$P(B) = 0{,}40$ und $P(A \mid B) = 0{,}06$ und $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}03$

a) $P(\overline{A}) = 0{,}958$
b) $P(\overline{B} \mid A) = \frac{0{,}018}{0{,}042} = 0{,}4286$
c) $P(\overline{A} \mid B) = \frac{0{,}376}{0{,}4} = 0{,}94$

Lösung von Aufgabe 3.4
B_1 = Produktionsstück wird am Montag gefertigt
$\vdots$
B_7 = Produktionsstück wird am Sonntag gefertigt
A = Produktionsstück ist Ausschuss
$P(A \mid B_1) = 0{,}10 \Rightarrow P(A \cap B_1) = 0{,}16 \cdot 0{,}10 = 0{,}016$
$P(A \mid B_2) = 0{,}05 \Rightarrow P(A \cap B_2) = 0{,}16 \cdot 0{,}05 = 0{,}008$

Arbeitstabelle:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	$\sum$
A	0,016	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	?
$\overline{A}$								
	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,10	0,10	1

a) $P(A) = 0{,}062$
b) $P(B_1 \mid A) = \dfrac{0{,}016}{0{,}062} = 0{,}2581$

Lösung zu Aufgabe 3.5
Sowohl für a), b) und c) lautet die Arbeitstabelle:

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut	0,38	0,39	0,77
Nur schwer	0,10	0,13	0,23
Zusammen	0,48	0,52	1

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Arbeitsblatt

Beispiel 1

Es fand eine Umfrage über die Beseitigung von Sperrpfosten statt. Die Sperrpfosten sollen verhindern, dass auf dem Fußweg geparkt wird.

A = befragte Person gab an, Auto zu fahren
R = befragte Person gab an, Rad zu fahren
B = befragte Person sprach sich für eine Beseitigung von Sperrpfosten aus

Welche der nachfolgenden Ereignisse sind bedingte Ereignisse, welche nicht?

a) 30% aller Befragten gaben an, sowohl Auto als auch Rad zu fahren.

b) 53% aller Autofahrer sprachen sich für eine Beseitigung von Sperrpfosten aus.

c) 50% aller Befragten sprachen sich für eine Beseitigung von Sperrpfosten aus.

d) 90% aller Befürworter der Beseitigung von Sperrpfosten waren Autofahrer.

e) 45% aller Befragten waren Autofahrer, die eine Beseitigung von Sperrpfosten befürworteten.

f) 83% aller Radfahrer sprachen sich gegen eine Beseitigung von Sperrpfosten aus.

g) 58% aller Gegner der Beseitigung von Sperrpfosten waren Radfahrer.

h) 29% aller Befragten waren Radfahrer, die sich gegen eine Beseitigung von Sperrpfosten aussprachen.

Lösung zu Beispiel 1:

siehe Aufgabe 4.3 aus:

ISBN 978 - 3 - 8252 - 5488 - 9

Beispiel 2
Bei einer Kunden-Umfrage eines Marktforschungsinstituts stellte sich heraus, dass

- 37% aller Befragten das Produkt I kaufen
- 48% aller Befragten Produkt II kaufen
- 25% der Käufer von Produkt II auch Produkt I kaufen

a) Wie groß ist der Anteil der Befragten, die

1. mindestens eines der beiden Produkte I, II kaufen?
2. genau eines der beiden Produkte I, II kaufen?
3. sowohl Produkt I als auch Produkt II kaufen?
4. höchstens eines der beiden Produkte kaufen?
5. weder Produkt I noch Produkt II kaufen?

b) Wie hoch ist unter den Käufern von Produkt I der Anteil der Kunden, die Produkt II nicht kaufen?

c) Sind die Ereignisse „Zufällig ausgewählter Kunde kauft Produkt I" und „Zufällig ausgewählter Kunde kauft Produkt II" stochastisch unabhängig?

Lösung zu Beispiel 2:
Bezeichnen Sie die Ereignisse wie folgt:
A= zufällig ausgewählter Kunde kauft Produkt I
B= zufällig ausgewählter Kunde kauft Produkt II

Lösung:

A=zufällig ausgewählter Kunde kauft Produkt I
B=zufällig ausgewählter Kunde kauft Produkt II

$0{,}37 = P(A)$
$0{,}48 = P(B)$
$0{,}25 = P(A \mid B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}25 \cdot 0{,}48 = 0{,}12$

	A	$\overline{A}$	
B	0,12	0,36	0,48
$\overline{B}$	0,25	0,27	0,52
	0,37	0,63	1

a) Wie groß ist der Anteil der Befragten, die

1. $P(A \cup B) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$
2. $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}25 + 0{,}36 = 0{,}61$
3. $P(A \cap B) = 0{,}12$
4. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$
5. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}27$

b) $P(\overline{B} \mid A) = \dfrac{0{,}25}{0{,}37} = 0{,}6757$

c) $P(A \mid B) = 0{,}25 \neq 0{,}37 = P(A)$
d.h. A, B abhängig.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Arbeitsblatt

Beispiel (Weigand, „Statistik mit und ohne Zufall“, Seite 170)
Ein Bankgebäude ist mit einer Alarmanlage gesichert. Die Chance, dass an einem Tag ein Einbruch versucht wird, liegt bei 0,2%. Findet ein Einbruch statt, gelingt es den Ganoven erfahrungsgemäß, die Anlage mit 5% Wahrscheinlichkeit auszutricksen, so dass kein Alarm gegeben wird. Findet an einem Tag kein Einbruch statt, kann es mit 0,5% Wahrscheinlichkeit zu einem Fehlalarm kommen.

Wie hoch ist die Chance, dass bei einem gegebenen Alarm tatsächlich eingebrochen wird?

Lösung:
E=an einem Tag wird eingebrochen
A=an einem Tag wird Alarm ausgelöst
$0{,}002 = P(E)$
$0{,}05 = P(\overline{A} \mid E) \Rightarrow P(\overline{A} \cap E) = 0{,}05 \cdot 0{,}002 = 0{,}00010$
$0{,}005 = P(A \mid \overline{E}) \Rightarrow P(A \cap \overline{E}) = 0{,}005 \cdot 0{,}998 = 0{,}00499$

	A	$\overline{A}$	
E	0,00190	0,00010	0,002
$\overline{E}$	0,00499	0,99301	0,998
	0,00689	0,99311	1

$P(E \mid A) = \dfrac{0{,}00190}{0{,}00689} = 0{,}27576 \neq P(E)$
d.h. E, A abhängig

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II
Bedingte Wahrscheinlichkeiten
Arbeitsblatt

Beispiel 1
Bei einer Umfrage über die Dauer von Telefongesprächen ergaben sich folgende Werte:

- 60% der Langtelefonierer sind Frauen
- 40% aller Befragten sind Langtelefonierer
- 50% aller Befragten sind Männer, die nicht lange telefonieren

Wie viel Prozent der Befragten,

a) die lange telefonieren, sind Männer?

b) die weiblich sind, telefonieren lange?

c) die nicht lang telefonieren, sind Männer?

Beispiel 2 (Süddeutsche Zeitung vom 12.03.2010, Seite 16)
In den USA haben Männer ein 16-Prozent-Risiko, irgendwann im Leben an Prostata-Krebs zu erkranken. Richard Albin hat 1970 den heute weit verbreiteten PSA-Test (prostataspezifisches Antigen) vorgeschlagen. Der Test entdeckt 3,8 Prozent aller Prostata-Krebserkrankungen. Und schließt bei 99,9 Prozent aller Gesunden eine Prostata-Krebserkrankung aus.

In wie viel Prozent der Fälle wird Männern ein falsch positiver Befund mitgeteilt; d.h. eine Nachuntersuchung bestätigt den Verdacht aufgrund des Tests nicht?

Lösung zu Beispiel 1

$0{,}40 = P(L)$
$0{,}60 = P(F \mid L) \Rightarrow P(F \cap L) = 0{,}60 \cdot 0{,}40 = 0{,}24$
$0{,}50 = P(M \cap \overline{L})$

	F	M	
L	$\boxed{0{,}24}$	0,16	$\boxed{0{,}40}$
$\overline{L}$	0,10	$\boxed{0{,}50}$	0,60
	0,34	0,66	1

a) $P(M \mid L) = \dfrac{0{,}16}{0{,}40} = 0{,}40$ oder $1 - P(F \mid L) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$

b) $P(L \mid F) = \dfrac{0{,}24}{0{,}34} = 0{,}7059 \approx 0{,}71$

c) $P(M \mid \overline{L}) = \dfrac{0{,}50}{0{,}60} = 0{,}8333 \approx 0{,}83$

Lösung zu Beispiel 2
K = Prostata-Krebserkrankung liegt vor
T = Test ist positiv
Gegeben sind die folgenden Anteile:
$P(K) = 0{,}16$
$P(T \mid K) = 0{,}038$
$P(\overline{T} \mid \overline{K}) = 0{,}999$
Daraus lassen sich die folgenden Anteile berechnen:
$P(K \cap T) = 0{,}16 \cdot 0{,}038 = 0{,}00608$
$P(\overline{K} \cap \overline{T}) = 0{,}84 \cdot 0{,}999 = 0{,}83916$
Jetzt können wir die Arbeitstabelle aufstellen:

	T	$\overline{T}$	
K	0,00608	0,15392	0,16
$\overline{K}$	0,00084	0,83916	0,84
	0,00692	0,99308	1

Gesucht wird: $P(\overline{K} \mid T) = ?$
$P(\overline{K} \mid T) = \dfrac{0{,}00084}{0{,}00692} = 0{,}121$
d.h. etwa 12,1% der positiv getesteten Männer erhalten einen falsch positiven Befund.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II
Arbeitsblatt

Beispiel 1:
Die Studierenden der TH Köln kommen wie folgt zur TH:

- 10% mit dem Auto/Motorrad/Roller
- 15% zu Fuß
- 20% mit dem Fahrrad
- der Rest mit öffentlichen Verkehrsmitteln

Von den Nutzern eines Autos/Motorrads/Rollers sind 2% verspätet, zu Fuß sind 1% verspätet, mit dem Rad sind 3% verspätet und mit öffentlichen Verkehrsmitteln sind 5% verspätet.

a) Wie hoch ist der Anteil der Studierenden, die verspätet zur Vorlesung erscheinen?

b) Ein Studierender ist verspätet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit dem Auto/Motorrad/Roller angereist ist?

c) Sind die Ereignisse
$\ddot{O}=$ ein zufällig ausgewählter Studierender kommt mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur TH
$V=$ ein zufällig ausgewählter Studierender ist verspätet
stochastisch unabhängig?

Beispiel 2:
Ein Schwangerschaftstest bestätigt bei 80% aller Schwangeren die bestehende Schwangerschaft. Und bei 85% der Nicht-Schwangeren schließt der Test eine Schwangerschaft aus.

a) Angenommen 4% der untersuchten Frauen sind schwanger. Wie viel Prozent der durch den Test als schwanger eingestuften Frauen sind tatsächlich schwanger?

b) Angenommen 40% der untersuchten Frauen sind schwanger. Wie viel Prozent der durch den Test als schwanger eingestuften Frauen sind tatsächlich schwanger?

Beispiel 3:
Die Freizeitgestaltung (Internet-Surfen, Spielfilm, Kneipenbesuch) sieht wie folgt aus:

1. An 77% aller Tage wird im Internet gesurft.
2. An 20% aller Tage wird ein Spielfilm angeschaut (Kino, TV, DVD).
3. An 15% aller Tage steht ein Kneipenbesuch an.
4. An 12% aller Tage werden sowohl ein Film angeschaut, als auch im Internet gesurft.
5. An 1% aller Tage werden alle drei Freizeitaktivitäten Internet-Surfen, Spielfilm, Kneipenbesuch durchgeführt.
6. An 7% aller Tage werden sowohl ein Spielfilm angeschaut, als auch ein Kneipenbesuch gemacht.
7. An 62% aller Tage wird ausschließlich im Internet gesurft, also kein Kneipenbesuch, kein Spielfilm.

a) An wie viel Prozent aller Tage wird keine der drei Freizeitaktivitäten Internet-Surfen, Spielfilm, Kneipenbesuch unternommen?

b) Sind die Ereignisse „Kneipenbesuch“ und „Spielfilm“ stochastisch unabhängig?

Beispiel 4 (Klausur vom 12.07.2005)
Weltweit werden 30% aller Koffer von Fluggesellschaft A transportiert, 20% aller Koffer von Fluggesellschaft B, 10% aller Koffer von Fluggesellschaft C, der Rest der Koffer wird von den übrigen Fluggesellschaften transportiert. Im Schnitt gehen bei Fluggesellschaft A jeder 40. Koffer verloren, bei Fluggesellschaft B jeder 50. Koffer, bei Fluggesellschaft C jeder 100. Koffer, und bei den übrigen Fluggesellschaften geht im Schnitt jeder 200. Koffer verloren.

Wie hoch ist unter den verloren gegangenen Koffern der Anteil der Koffer, die aufgegeben wurden bei

- Fluggesellschaft A?
- Fluggesellschaft B?

- Fluggesellschaft C?

Beispiel 5 (vgl. Nature Energy 10 September 2018 „Equity and the willingness to pay for green electricity in Germany“ Andor/Frondel/Sommer)
„Ausnahmen für Unternehmen bei der EEG-Umlage senken die Zahlungsbereitschaft privater Haushalte“ (vgl. Süddeutsche vom 14.09.2018). Gemäß dem Erneuerbare-Energien-Gesetz (kurz: EEG) sind in Deutschland energie-intensive Unternehmen beim Stromverbrauch von der sogenannten EEG-Umlage in Höhe von 6,8 Cent pro Kilowattstunde befreit, während private Haushalte diese Umlage zahlen müssen. Wenn der Anteil der erneuerbaren Energien an der Stromversorgung auf 35 % gesteigert werden soll, wäre eine Erhöhung der EEG-Umlage um vier Cent pro Kilowattstunde erforderlich.

Um die Bereitschaft der privaten Haushalte zur Erhöhung der EEG-Umlage herauszubekommen, hat das RWI-Leibniz-Instutut für Wirtschaftsforschung ein Experiment durchgeführt. Die Teilnehmer des Experiments wurden zufällig auf drei (gleich starke) Gruppen aufgeteilt.

In der ersten Gruppe wurden die Teilnehmer ohne weitere Informationen lediglich gefragt, ob sie einer EEG-Umlage-Erhöhung um vier Cent zustimmen würden, was 41 Prozent bejahten.

In der zweiten Gruppe erhielten die Teilnehmer die Information, dass Unternehmen in Deutschland von der EEG-Umlage befreit sind und wurden anschließend gefragt, ob sie bereit wären, vier Cent mehr pro Kilowattstunde zu zahlen. Zwischen 23 und 38 Prozent der Teilnehmer in der zweiten Gruppe waren bereit, eine höhere EEG-Umlage zu zahlen.

In der dritten Gruppe erhielten die Teilnehmer die falsche Auskunft, das Privleg der EEG-Umlage-Befreiung für Unternehmen würde im Zuge der Erhöhung abgeschafft werden. Anschließend wurden sie gefragt, ob sie bereit wären, vier Cent mehr pro Kilowattstunde zu zahlen. Zwischen 61 und 74 Prozent der Teilnehmer in der dritten Gruppe waren bereit, eine höhere EEG-Umlage zu zahlen.

Damit wir rechnen können, nehmen Sie bitte an, dass in der zweiten Gruppe genau 23 Prozent der Erhöhung zugestimmt haben und in der dritten Gruppe genau 61 Prozent.

a) Wie hoch ist in der Bevölkerung der Anteil der Personen, die eine EEG-Umlage-Erhöhung akzeptieren würden?

b) Sind die Ereignisse „zufällig ausgewählte Person akzeptiert eine EEG-Umlage-Erhöhung“ und „zufällig ausgewählte Person gehört zur zweiten Gruppe“ stochastisch unabhängig?

Lösung zu Beispiel 1

A=ein zufällig ausgewählter Studierender kommt mit dem Auto/Motorrad/Roller zur TH
F=ein zufällig ausgewählter Studierender kommt zu Fuß zur TH
R=ein zufällig ausgewählter Studierender kommt mit Rad zur TH
$\ddot{O}$= ein zufällig ausgewählter Studierender kommt mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur TH
V= ein zufällig ausgewählter Studierender ist verspätet

Im Aufgabentext sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$P(A) = 0{,}10 \quad P(V \mid A) = 0{,}02$
$P(F) = 0{,}15 \quad P(V \mid F) = 0{,}01$
$P(R) = 0{,}20 \quad P(V \mid R) = 0{,}03$
$P(\ddot{O}) = 0{,}55 \quad P(V \mid \ddot{O}) = 0{,}05$

a) $P(V \cap A) = P(V \mid A) \cdot P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}02 = 0{,}0020$
$P(V \cap F) = P(V \mid F) \cdot P(F) = 0{,}15 \cdot 0{,}01 = 0{,}0015$
$P(V \cap R) = P(V \mid R) \cdot P(R) = 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}0060$
$P(V \cap \ddot{O}) = P(V \mid \ddot{O}) \cdot P(\ddot{O}) = 0{,}55 \cdot 0{,}05 = 0{,}0275$
Daraus lässt sich eine Arbeitstabelle aufstellen:

	A	F	R	$\ddot{O}$	
V	0,0020	0,0015	0,0060	0,0275	0,0370
$\overline{V}$					
	0,10	0,15	0,20	0,55	1

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,037.

b) $P(A \mid V) = \dfrac{0{,}002}{0{,}037} = 0{,}0541$

c) $P(V \mid \ddot{O}) = 0{,}05 \neq 0{,}037 = P(V)$
d.h. V und $\ddot{O}$ sind abhängig.

Lösung zu Beispiel 2

a) $0{,}85 = P(\overline{T} \mid \overline{S})$
$0{,}80 = P(T \mid S)$
$0{,}04 = P(S)$

	S	$\overline{S}$	
T	0,032	0,144	0,176
$\overline{T}$	0,008	0,816	0,824
	0,04	0,96	1

$P(S \mid T) = \dfrac{0{,}032}{0{,}176} = 0{,}18$

b) $0{,}85 = P(\overline{T} \mid \overline{S})$

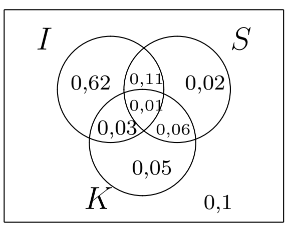
$0{,}80 = P(T \mid S)$
$0{,}40 = P(S)$

	S	$\overline{S}$	
T	0,32	0,09	0,41
$\overline{T}$	0,08	0,51	0,59
	0,4	0,6	1

$$P(S \mid T) = \frac{0{,}32}{0{,}41} = 0{,}78$$

Lösung zu Beispiel 3

Venn-Diagramm:



a) $P(\overline{I} \cap \overline{S} \cap \overline{K}) = 0{,}1$

b) $P(K) \cdot P(S) = 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$
$P(K \cap S) = 0{,}07$
d.h. K und S sind abhängig.

Lösung zu Beispiel 4:
siehe Aufgabe 4.5 aus:
©UTB 2020 Arrenberg, Jutta: Wirtschaftsstatistik für Bachelor, 4. Auflage
ISBN 978 - 3 - 8252 - 5488 - 9

Lösung zu Beispiel 5:
E = zufällig ausgewählte Person akzeptiert eine EEG-Umlage-Erhöhung
G_1 = zufällig ausgewählte Person gehört zur ersten Gruppe
G_2 = zufällig ausgewählte Person gehört zur zweiten Gruppe
G_3 = zufällig ausgewählte Person gehört zur dritten Gruppe
$0{,}41 = P(E \mid G_1)$
$0{,}23 = P(E \mid G_2)$
$0{,}61 = P(E \mid G_3)$
$0{,}\overline{3} = P(G_1) = P(G_2) = P(G_3)$
Arbeitstabelle:

	G_1	G_2	G_3	
E	$0{,}13\overline{6}$	$0{,}07\overline{6}$	$0{,}20\overline{3}$	$0{,}41\overline{6}$
$\overline{E}$				
	$0{,}\overline{3}$	$0{,}\overline{3}$	$0{,}\overline{3}$	1

a) Die Teilnehmer der ersten Gruppe repräsentieren die Gesamtbevölkerung, weil die erste Gruppe nicht durch gezielte Auskünfte/Informationen beeinflusst wurde.
$P(E \mid G_1) = 0{,}41$
d. h. 41 % der Bevölkerung würde eine EEG-Umlage-Erhöhung akzeptieren.
$P(E) = 0{,}41\overline{6}$
d. h. unter den Teilnehmern des Experiments ist $P(E)$ leicht erhöht gegenüber der Gesamtbevölkerung. Das ist zum einen auf die Information in der zweiten Gruppe und zum anderen auf die Auskunft in der dritten Gruppe zurückzuführen.

b) $P(E \mid G_2) = 0{,}23 \neq 0{,}41\overline{6} = P(E)$
d. h. E, G_2 sind nicht stochastisch unabhängig.

Insgesamt lässt sich aus dem Experiment schließen, dass eine Abschaffung der Ausnahmeregelung die Akzeptanz einer Erhöhung der EEG-Umlage steigern würde.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Arbeitsblatt

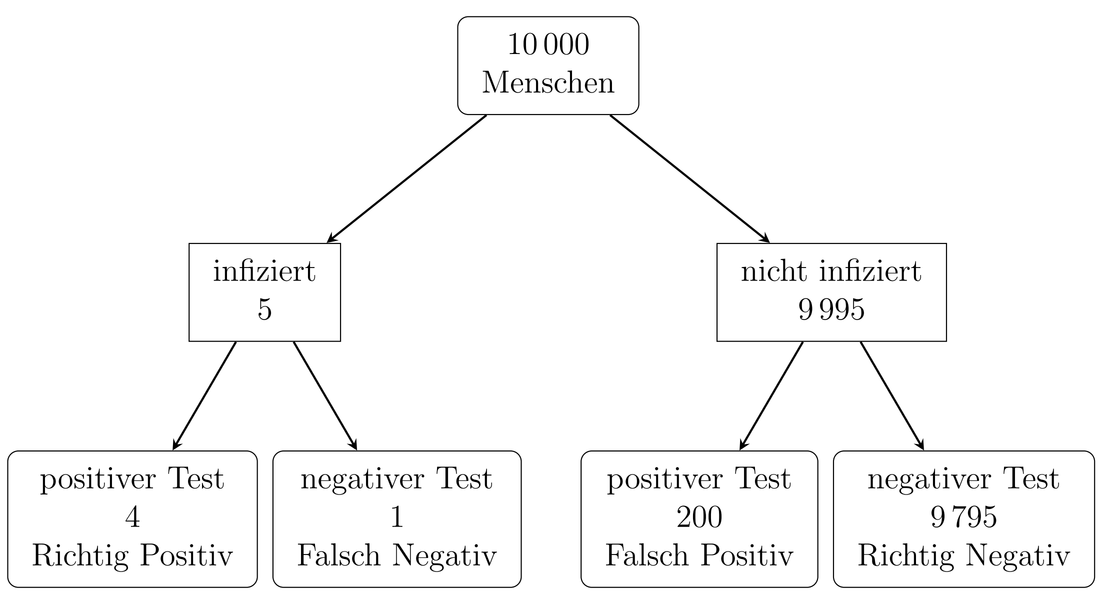
Beispiel (Quelle: Robert-Koch-Institut am 29.12.2020)
Der Corona-Schnelltest bestätigt bei 80% aller Erkrankten die bestehende Corona-Infektion. Und bei 98% der Nicht-Erkrankten schließt der Test eine Corona-Infektion aus.

a) Angenommen 0,05% der Getesteten sind tatsächlich infiziert. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, trotz eines negativen Testergebnisses doch akut infiziert zu sein?

b) Angenommen 10% der Getesteten sind tatsächlich infiziert. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, trotz eines negativen Testergebnisses doch akut infiziert zu sein?

Lösung:
T = Test positiv
C = infiziert mit Corona
Sensitivität = 0,80 = $P(T \mid C)$
Spezifität = 0,98 = $P(\overline{T} \mid \overline{C})$

a) $P(C) = 0{,}0005$



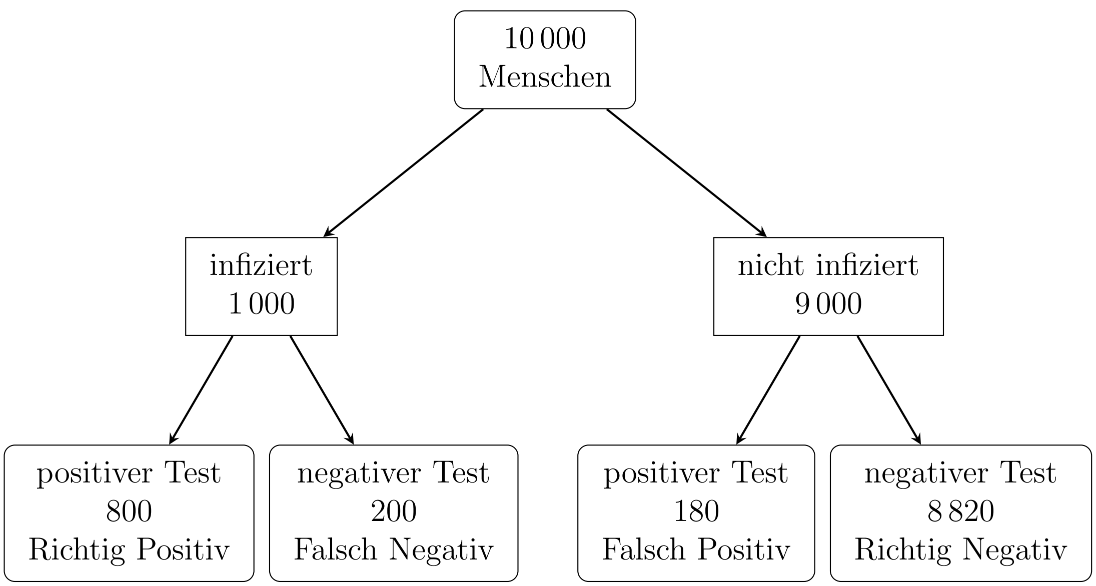
$P(T \cap C) = P(T \mid C) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}0005 = 0{,}00040$
$P(\overline{T} \cap \overline{C}) = P(\overline{T} \mid \overline{C}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}98 \cdot 0{,}9995 = 0{,}97951$

	C	$\overline{C}$	
T	0,00040	0,01999	0,02039
$\overline{T}$	0,00010	0,97951	0,97961
	0,0005	0,9995	1

$$P(C \mid \overline{T}) = \frac{0{,}00010}{0{,}97961} = 0{,}00010 = 0{,}01\%$$

d.h. von den Getesteten, die ein negatives Testergebnis erhalten haben, sind tatsächlich 0,01% doch akut mit Corona infiziert.

b) $P(C) = 0{,}10$



$P(T \cap C) = P(T \mid C) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}080$
$P(\overline{T} \cap \overline{C}) = P(\overline{T} \mid \overline{C}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}98 \cdot 0{,}9 = 0{,}882$

	C	$\overline{C}$	
T	0,080	0,018	0,098
$\overline{T}$	0,020	0,882	0,902
	0,1	0,9	1

$$P(C \mid \overline{T}) = \frac{0{,}020}{0{,}902} = 0{,}022 = 2{,}2\%$$

d.h. von den Getesteten, die ein negatives Testergebnis erhalten haben, sind tatsächlich 2,2% doch akut mit Corona infiziert.

https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Infografik_Antigentest_PDF.pdf?__blob=publicationFile

Anmerkung: (Quelle: *Süddeutsche Zeitung vom 30.12.2020, Seite 28, „Weltweit bester Schnelltest“*

Die Bayerische Firma GNA Biosolutions hat am Di 29.12.2020 das neue Gerät „Octea“, mit dem ein Corona-Schnelltest durchgeführt werden kann, vorgestellt. Dieser Corona-Schnelltest hat eine Sensitivitä von 96,7%, d.h. $P(T \mid C) = 0{,}967$ und eine Spezifität von 100%, d.h. $P(\overline{T} \mid \overline{C}) = 1$.