Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM II

Zufallsvariablen

Aufgabe 4.1

Ein Unternehmen fertigt einen Teil der Produktion in seinem Werk in München und den anderen Teil in seinem Werk in Köln. Auf Grund einer Initiative des Betriebsrats wird die Häufigkeit von Betriebsunfällen in den letzten Perioden untersucht, und es werden daraus Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Betriebsunfälle pro Periode abgeleitet.
Es zeigt sich folgendes Ergebnis:

Anzahl der Betriebs-unälle pro Periode	Wahrscheinlichkeit für das Werk in	
	München	Köln
0	0,35	0,40
1	0,25	0,30
2	0,20	0,20
3	0,15	0,08
4	a	b

a) Bestimmen Sie die Werte für a und b in der obigen Tabelle.

b) Berechnen Sie sowohl für das Werk in München als auch für das Werk in Köln die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt mindestens eines Betriebsunfalls in der kommenden Periode.

c) Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Betriebsunfälle in München und Köln stochastisch unabhängig sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der kommenden Periode in München und Köln zusammen mindestens zwei Betriebsunfälle auftreten werden?

Aufgabe 4.2

Von den beiden Zufallsvariablen X und Y ist die folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x \cap Y = y)$ gegeben:

Y	X		
	1	2	3
1	0,10	0,05	0,05
2	0,40	0,35	0,05

Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 4.3

Sind beim zweimaligen Würfeln die beiden Zufallsvariablen X = „Augenzahl des ersten Wurfs“ und Z = „Summe der beiden Augenzahlen“ stochastisch unabhängig?

Lösung zu Aufgabe 4.1:
X= Anzahl der Unfälle in München
Y= Anzahl der Unfälle in Köln

a)

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,35	0,25	0,20	0,15	0,05

y	0	1	2	3	4
$P(Y=y)$	0,40	0,30	0,20	0,08	0,02

b) $P(X \geq 1) = 0{,}65$
$P(Y \geq 1) = 0{,}60$

c) $P(X+Y \geq 2) = 1 - P(X+Y < 2) = 1 - P(X+Y \leq 1)$

$$\begin{aligned}
P(X+Y \leq 1) &= P(X+Y=0) + P(X+Y=1) \\
&= P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1) \\
&= P(X=0) \cdot P(Y=0) + P(X=1) \cdot P(Y=0) + P(X=0) \cdot P(Y=1) \\
&= 0{,}35 \cdot 0,4 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 \cdot 0{,}3 \\
&= 0{,}345
\end{aligned}$$

$P(X+Y \geq 2) = 1 - 0{,}345 = 0{,}655$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 65,5%.

Lösung zu Aufgabe 4.2

Y	X 1	2	3	$\sum$
1	0,10	0,05	0,05	0,2
2	0,40	0,35	0,05	0,8
$\sum$	0,5	0,4	0,1	1

$P(X=2) \cdot P(Y=1) = 0{,}40 \cdot 0{,}20 = 0{,}08 \neq 0{,}05 = P(X=2 \cap Y=1)$
d.h. die beiden Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch abhängig.

Lösung zu Aufgabe 4.3

$P(X=2) = \frac{1}{6}$

$P(Z=3) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = \frac{2}{36}$

$P(X=2 \cap Z=3) = P(X=2 \cap Y=1) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{36} = P(X=2) \cdot P(Z=3)$

d.h. X, Y sind stochastisch abhängig.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Arbeitsblatt

Beispiel

Zwei Stellwerke A und B teilen sich die Überwachung von Weichen. Sind mehr als sieben Weichen gleichzeitig gestört, so kommt es zu erheblichen Beeinträchtigungen des Zugverkehrs. Die Anzahl der Weichenstörungen in Stellwerk A geschieht gemäß der folgenden Verteilung:

gestörte Weichen	0	1	2	3	4
Wkt.	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Die Anzahl der Weichenstörungen in Stellwerk B geschieht gemäß der folgenden Verteilung:

gestörte Weichen	0	1	2	3	4	5
Wkt.	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Weichenstörungen geschehen stochastisch unabhängig voneinander.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass in Stellwerk A und B zusammen genau sieben Weichen gestört sind?

b) dass der Zugverkehr aufgrund von Weichenstörungen in den beiden Stellwerken erheblich beeinträchtigt ist?

c) dass der Zugverkehr nicht aufgrund von Weichenstörungen in den beiden Stellwerken erheblich beeinträchtigt ist?

X=Anzahl der Weichenstörungen in Stellwerk A
Y=Anzahl der Weichenstörungen in Stellwerk B

a) $P(X+Y=7)=$
$=P(X=2\cap Y=5)+P(X=3\cap Y=4)+P(X=4\cap Y=3)=$
$=P(X=2)\cdot P(Y=5)+P(X=3)\cdot P(Y=4)+P(X=4)\cdot P(Y=3)=$
$=0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}06$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 6%.

b) $P(X+Y\geq 8)=P(X+Y=8)+P(X+Y=9)$
$P(X+Y=8)=0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}03$
$P(X+Y=9)=P(X=4)\cdot P(Y=5)=0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}01$
$\Rightarrow P(X+Y\geq 8)=0{,}03+0{,}01=0{,}04$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 4%.

c) $P(X+Y\leq 7)=1-P(X+Y>7)=1-0{,}04=0{,}96$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 96%.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM II

Arbeitsblatt

Beispiel 1

In einer Umfrage in den US wurde der Schulabschluss von Eltern untersucht. Es ergaben sich folgende Werte:

Mother's education	Father's education			
	8th grade or less	Part high school	High school	College
8th grade or less	20,8%	0,8%	2,3%	2,8%
Part high school	3,6%	2,1%	2,3%	1,5%
High school	11,0%	1,8%	11,0%	4,6%
College	5,4%	1,5%	6,2%	22,3%

Es bezeichnen X=„Schulabschluss einer zufällig ausgewählten Ehefrau“ und Y=„Schulabschluss ihres Ehemannes“. Sind X, Y stochastisch unabhängig voneinander?

Beispiel 2:

Um den Betrieb aufrecht zu erhalten, darf die Anzahl der Krankmeldungen aus den beiden Abteilungen A und B zusammen höchstens vier Personen betragen.
Nehmen Sie an, dass die Krankmeldungen in A und B stochastisch unabhängig voneinander erfolgen und wie folgt eintreten:

Anzahl Krankmeldungen	0	1	2	3	4	5
Wahrscheinlichkeit in A	0,90	0,05	0,03	0,02	0	0
Wahrscheinlichkeit in B	0,85	0,06	0,04	0,03	0,01	0,01

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrieb aufgrund von Krankmeldungen geschlossen werden muss?

Lösung zu Beispiel 1

$0{,}208 + 0{,}008 + 0{,}023 + 0{,}028 = 0{,}267$

$0{,}208 + 0{,}036 + 0{,}110 + 0{,}054 = 0{,}408$

$P(X = 1, Y = 1) = 0{,}208 \neq 0{,}109 \approx 0{,}267 \cdot 0{,}408 = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$

d.h. X, Y sind stochastisch abhängig.

Lösung zu Beispiel 2

X = Anzahl der Krankmeldungen in A

Y = Anzahl der Krankmeldungen in B

$P(X + Y \geq 5) = ?$

x	y	$P(X = x, Y = y)$
0	5	$0{,}90 \cdot 0{,}01$
1	4	$0{,}05 \cdot 0{,}01$
1	5	$0{,}05 \cdot 0{,}01$
2	3	$0{,}03 \cdot 0{,}03$
2	4	$0{,}03 \cdot 0{,}01$
2	5	$0{,}03 \cdot 0{,}01$
3	2	$0{,}02 \cdot 0{,}04$
3	3	$0{,}02 \cdot 0{,}03$
3	4	$0{,}02 \cdot 0{,}01$
3	5	$0{,}02 \cdot 0{,}01$
		$\sum = 0{,}0133$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0133.