

Technische Hochschule Köln  
 Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften  
 Prof. Dr. Arrenberg  
 Raum 221, Tel 39 14  
 jutta.arrenberg@th-koeln.de

## Übungen zu QM III

### Indexrechnung

#### Aufgabe 8.1

Für fünf Güter eines Warenkorb, den Haushalte nachfragen, haben sich die Preise und Mengen vom Basisjahr  $t = 0$  bis zum Berichtsjahr  $t > 0$  wie folgt entwickelt:

Gut i	Mengen		Preise	
	$q_i^0$	$q_i^t$	$p_i^0$	$p_i^t$
1	800	900	1,50	1,20
2	500	400	2,00	3,00
3	50	60	10,00	8,00
4	150	100	1,50	2,00
5	80	100	4,50	5,00

Zeigen Sie, wie sich aus dem Preisindex von Laspeyres und dem Mengenindex von Paasche ein Ausgabenindex bzw. Wertindex ergibt. Wie groß ist er und was sagt er aus?

#### Aufgabe 8.2

Die Veränderungen zum Vorjahr in Prozent der Verbraucherpreise in Deutschland betragen im Zeitraum 1992 bis 2015 (Quelle: *www.destatis.de*):

Veränderung gegenüber Vorjahr in Prozent					
92	5,1	03	1,1	14	0,9
93	4,5	04	1,6	15	0,3
94	2,6	05	1,6	16	0,5
95	1,8	06	1,5	17	1,6*
96	1,4	07	2,3		
97	2,0	08	2,6		
98	1,0	09	0,3		
99	0,6	10	1,1		
00	1,4	11	2,1		
01	2,0	12	2,0		
02	1,4	13	1,5		

)\* geschätzter Wert Deutsche Bank

a) Um wie viel Prozent sind die Verbraucherpreise in Deutschland im Zeitraum von 2011 bis 2016

1. insgesamt gestiegen?
2. durchschnittlich pro Jahr gestiegen?

b) Um wie viel Prozent ist die Kaufkraft in Deutschland von 2011 bis 2016

1. insgesamt gesunken?
2. im Durchschnitt pro Jahr gesunken?

### Aufgabe 8.3

In den beiden Jahren 2011 und 2015 betragen die Ausgaben (in GE) für eine Geburtstagsfeier:

Jahr	Ausgaben	
	in Preisen von 2011	in jeweiligen Preisen
2011	110,5	110,5
2015	112,9	116,2

a) Um wie viel Prozent sind die Ausgaben im Zeitraum 2011 bis 2015

1. nominal gestiegen?
2. durchschnittlich pro Jahr nominal gestiegen?
3. real gestiegen?
4. durchschnittlich pro Jahr real gestiegen?

b) Wie hoch ist im Zeitraum von 2011 bis 2015 die durchschnittliche jährliche Inflationsrate?

### Aufgabe 8.4

Der Deutsche Aktien Xchange 30 (kurz: Dax) enthält als wichtigster Börsenindex dreißig Aktien der führenden deutschen Unternehmen, die an den deutschen Börsen gehandelt werden. Am 30.12.1987 wurde erstmals der Dax willkürlich auf den Wert 1 000 festgesetzt. Für die zurückliegenden Jahre 2005, 2010, 2012, 2014, 2019 ergaben sich die folgenden Jahresendwerte:

2005	2010	2012	2014	2019
5 408	6 914	7 612	9 806	13 249

a) Interpretieren Sie den Wert 6 914.

b) Um wie viel Prozent ist der Aktienindex in Deutschland im Zeitraum von 2010 bis 2014 insgesamt gestiegen?

c) Um wie viel Prozent ist der Aktienindex in Deutschland im Zeitraum von 2010 bis 2014 durchschnittlich pro Jahr gestiegen?

*Süddeutsche 06.03.2020, Seite 17: Um bei dem Wert einer Firma auch die drei Aspekte Umweltschutz (Environment), Behandlung von Mitarbeitern und Kunden (Social), Beachtung von Regeln guter Unternehmensführung (Governance) - kurz ESG - zu berücksichtigen, hat die Deutsche Börse einen der neuen Aktienindex aufgelegt, den sogenannten Dax 50 ESG.*

### Aufgabe 8.5

In der nachfolgenden Tabelle ist der Verbraucherpreisindex (Preisindex für die Lebenshaltung der privaten Haushalte) berechnet:

	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
$P_{2005,i}$	100,0	101,6	103,9	106,6	107,0	108,2						
$P_{2010,i}$						100,0	102,1	104,1	105,7	106,6	106,9	107,4

Im Jahr 2010 wurde ein neuer Warenkorb erstellt, was zum Bruch der Indexzahlenreihe geführt hat. Für bestimmte Zwecke (Berechnung von Betriebsrenten oder Mieten) sind lange, durchgehende Indexzahlenreihen erforderlich. Diese können mit Hilfe der Verknüpfung hergestellt werden.

- Setzen Sie die alte Indexzahlenreihe fort.
- Rechnen Sie die neue Indexzahlenreihe zurück.
- Um wie viel Prozent ist der Preisindex im Zeitraum 2009 bis 2016 insgesamt gestiegen?

### Aufgabe 8.6

Eine Studie kommt im Land X zu dem Ergebnis, dass im Jahr 2015 exakt doppelt so viele Menschen sich beim Fußballspielen den Fuß gebrochen haben wie 2014. Welche Aussage ist, allein auf obige Daten basierend, richtig?

- Das Risiko eines einzelnen Fußballspielers ( $w,m$ ), sich einen Fuß zu brechen, hat sich 2015 gegenüber dem Vorjahr verdoppelt.
- 2015 fanden mehr Fußballspiele statt als 2014.
- 2015 spielten mehr Menschen Fußball als 2014.
- Ob sich das Knochenbruch-Risiko eines einzelnen Fußballspielers 2015 im Vergleich zu 2014 verändert hat, kann aus den gegebenen Daten nicht hergeleitet werden.
- Im Jahr 2016 wird sich die Anzahl der Knochenbrüche bei Fußballspielern im Vergleich zu 2014 mehr als vervierfachen.

*Lösung zu Aufgabe 8.1:*

Die Kosten (Preisindex) für den Warenkorb sind im Zeitraum vom Basisjahr bis zum Berichtsjahr um 8,37% gestiegen. Der Verbrauch (Mengenindex) im Warenkorb ist im Zeitraum vom Basisjahr bis zum Berichtsjahr um 2,81% gesunken. Die Ausgaben (Wertindex) für den Warenkorb sind im Zeitraum vom Basisjahr bis zum Berichtsjahr um 5,33 % gestiegen.

*Lösung zu Aufgabe 8.2:*

- a) 1. Produkt der Faktoren der Veränderung:  
 $P = 1,020 \cdot 1,015 \cdot 1,009 \cdot 1,003 \cdot 1,005 = 1,05299$   
d.h. die Verbraucherpreise in Deutschland sind im Zeitraum von 2011 bis 2016 um 5,3 % insgesamt gestiegen.
2.  $P = {}^{2016-2011}\sqrt{1,05299} = \sqrt[5]{1,05299} = 1,01038$   
d.h. die Verbraucherpreise in Deutschland sind im Zeitraum von 2011 bis 2016 um durchschnittlich 1,0 % pro Jahr gestiegen.

- b) 1. Kaufkraft  $= \frac{1}{P} = \frac{1}{1,05299} = 0,9496764$   
 $0,9496764 - 1 = -0,05032365$   
d.h. die Kaufkraft in Deutschland ist im Zeitraum von 2011 bis 2016 um 5,0% insgesamt gesunken.

2. 1. Lösungsweg:  
Kaufkraft  $= \frac{1}{P} = \frac{1}{1,01038} = 0,9897263$   
 $0,9897263 - 1 = -0,01027367$   
d.h. die Kaufkraft in Deutschland ist im Zeitraum von 2011 bis 2016 um durchschnittlich 1,0% pro Jahr gesunken.

2. Lösungsweg:  
 $\sqrt[5]{0,9496764} = 0,9897263$   
 $0,9897263 - 1 = -0,01027366$   
d.h. die Kaufkraft in Deutschland ist im Zeitraum von 2011 bis 2016 um durchschnittlich 1,0% pro Jahr gesunken.

*Lösung zu Aufgabe 8.3:*

- a) 1.  $W = \frac{116,2}{110,5} = 1,051584$   
d.h. die nominale Steigerung betrug 5,16%.
2.  $W = \sqrt[4]{1,051584} = 1,012654$   
d.h. die durchschnittliche jährliche nominale Steigerung betrug 1,27%.
3.  $Q^{La} = \frac{112,9}{110,5} = 1,021719$   
d.h. die reale Steigerung betrug 2,17%.

$$4. Q^{La} = \sqrt[4]{1,021719} = 1,005386$$

d.h. die durchschnittliche jährliche reale Steigerung betrug 0,54%.

$$b) P^{Pa} = \frac{W}{Q^{La}} = \frac{1,012654}{1,005386} = 1,007229$$

d.h. die durchschnittliche jährliche Inflationsrate betrug 0,72%.

2. Lösungsweg:

$$P^{Pa} = \sqrt[4]{\frac{116,2}{112,9}} = 1,007229$$

Lösung zu Aufgabe 8.4:

a) Im Zeitraum vom 31.12.1987 bis zum 31.12.2010 ist der DAX auf das 6,914-fache gestiegen. Oder: Im Zeitraum vom 31.12.1987 bis zum 31.12.2010 ist der DAX um 591,4% gestiegen.

$$b) \frac{9806}{6914} = 1,418282 \text{ und } 1,418282 - 1 = 0,418282$$

d.h. der DAX ist im Zeitraum von 2010 bis 2014 um insgesamt 41,8 % gestiegen.

$$c) \sqrt[2014-2010]{1,418282} = \sqrt[4]{1,418282} = 1,091291$$

$$1,091291 - 1 = 0,091291$$

d.h. der DAX ist im Zeitraum von 2010 bis 2014 um durchschnittlich 9,1% pro Jahr gestiegen.

Lösung zu Aufgabe 8.5

$$a) 102,1 \cdot \frac{108,2}{100,0} = 110,5$$

$$104,1 \cdot \frac{108,2}{100,0} = 112,6$$

$$105,7 \cdot \frac{108,2}{100,0} = 114,4$$

$$106,6 \cdot \frac{108,2}{100,0} = 115,3$$

$$106,9 \cdot \frac{108,2}{100,0} = 115,7$$

$$107,4 \cdot \frac{108,2}{100,0} = 116,2$$

Daraus ergibt sich die fortgesetzte Indexzahlenreihe:

$i$	2005	...	2011	2012	2013	2014	2015	2016
$P_{2005,i}$	100	...	110,5	112,6	114,4	115,3	115,7	116,2

$$b) 100,0 \cdot \frac{100,0}{108,2} = 92,4$$

$$101,6 \cdot \frac{100,0}{108,2} = 93,9$$

$$103,9 \cdot \frac{100,0}{108,2} = 96,0$$

$$106,6 \cdot \frac{100,0}{108,2} = 98,5$$

$$107,0 \cdot \frac{100,0}{108,2} = 98,9$$

Daraus ergibt sich die zurückgerechnete Indexzahlenreihe:

$i$	2005	2006	2007	2008	2009	2010
$P_{2010,i}$	92,4	93,9	96,0	98,5	98,9	100

c) 1. Lösungsweg:

$$\frac{\text{Index}_{2016}}{\text{Index}_{2009}} = \frac{116,2}{107,0} = 1,086$$

d.h. im Zeitraum 2009 bis 2016 ist der Index um 8,6% insgesamt gestiegen.

2. Lösungsweg:

$$\frac{\text{Index}_{2016}}{\text{Index}_{2009}} = \frac{107,4}{98,9} = 1,086$$

3. Lösungsweg:

$$\text{Stg. 2009 - 2010: } \frac{108,2}{107,0} = 1,011215$$

$$\text{Stg. 2010 - 2016: } \frac{107,4}{100} = 1,074$$

$$\text{Stg. 2009 - 2016: } 1,011215 \cdot 1,074 = 1,086$$

*Lösung zu Aufgabe 8.6*

Da nicht angegeben ist, wie viele Menschen Fußball spielen, kann keine Aussage über das Knochenbruch-Risiko gemacht werden. Also ist nur Antwort d) richtig.

**Technische Hochschule Köln**  
**Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften**  
Prof. Dr. Arrenberg  
Raum 221, Tel 39 14  
jutta.arrenberg@th-koeln.de

**Vorlesung QM III**  
Arbeitsblatt

**Beispiel**

In der nachfolgenden Tabelle sind der Verbraucher-Preisindex nach Bedarfsgruppen getrennt im August 2017 (Basisjahr 2010=100) und das Wägungsschema aus dem Jahr 2010 angegeben (Quelle: Statistisches Bundesamt Deutschland):

Bedarfsgruppe	2010	08/2017
	Gewicht (in %)	Index
Nahrungsmittel, alk.f.Getränke	10,271	115,7
Alk. Getränke,Tabakwaren	3,759	119,8
Bekleidung, Schuhe	4,493	105,9
Wohnungsmieten, Energie	31,729	109,6
Einrichtungsgegenstände	4,978	104,0
Gesundheitspflege	4,444	107,3
Verkehr	13,473	107,5
Nachrichtenübermittlung	3,010	89,6
Freizeit, Unterhaltung	11,492	111,1
Bildungswesen	0,880	95,3
Gaststättendienstl.	4,467	116,1
Andere Waren und Dienstl.	7,004	109,6

In der nachfolgenden Tabelle ist der Entwicklungsstand, gemessen am HDI, einiger ausgewählter Länder wiedergegeben:

Land	HDI			
	2005	2009	2010	2012
Norwegen	0,944	0,971	0,938	0,955
USA	0,937	0,956	0,902	0,937
Deutschland	0,921	0,947	0,885	0,920
Schweden	0,941	0,963	0,885	0,916
Japan	0,932	0,960	0,884	0,912
Österreich	0,929	0,955	0,851	0,895
Frankreich	0,925	0,961	0,872	0,893
Italien	0,916	0,951	0,854	0,881
Polen	0,841	0,870	0,795	0,821
Brasilien	0,777	0,807	0,699	0,730
China	0,721	0,777	0,663	0,699
Sierra Leone	0,275	0,365	0,317	0,359



## Beispiel

Verbraucher-Preisindex (VPI) im August 2017 (Basisjahr 2010=100):

	2010	08/2017
Bedarfsgruppe	Gewicht (in %)	Index
Nahrungsmittel, alk.f.Getränke	10,271	115,7
Alk. Getränke, Tabakwaren	3,759	119,8
Bekleidung, Schuhe	4,493	105,9
Wohnungsmieten, Energie	31,729	109,6
Einrichtungsgegenstände	4,978	104,0
Gesundheitspflege	4,444	107,3
Verkehr	13,473	107,5
Nachrichtenübermittlung	3,010	89,6
Freizeit, Unterhaltung	11,492	111,1
Bildungswesen	0,880	95,3
Gaststättendienstl.	4,467	116,1
Andere Waren und Dienstl.	7,004	109,6

$$\begin{aligned} \text{VPI}_{2010,2017} &= 115,7 \cdot 0,10271 + \dots + 109,6 \cdot 0,07004 \\ &= 109,5147 \end{aligned}$$