Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

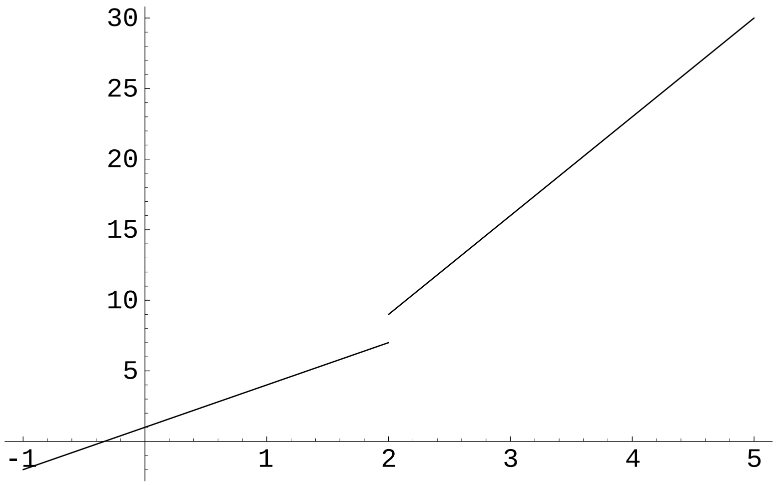
Übungen zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik

Stetigkeit und Ableitungen

Aufgabe 6.1

Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion stetig ist:

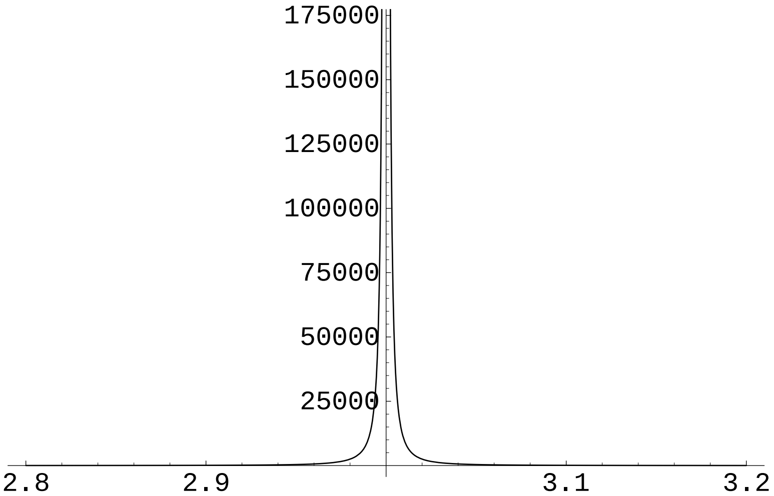
$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & ; x < 2 \\ 7x-5 & ; x \geq 2 \end{cases}$$



Aufgabe 6.2

Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion stetig ist:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \quad ; x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$$



Aufgabe 6.3

Leiten Sie die nachfolgenden Funktionen einmal ab:

a) $f(x) = 7x^{12} \quad , x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \quad , x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

c) $f(x) = \sqrt{x-5} \;\; , x \in (5; \infty)$

d) $f(x) = (3x-4)^{20} \;\; , x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = \ln(4x+5) \;\; , x \in (-\frac{5}{4}; \infty)$

f) $f(x) = 5\ln(x) - 20 \;\; , x \in \mathbb{R}^+$

g) $f(x) = x^7 e^x \;\; , x \in \mathbb{R}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(7-4x)^2} \;\; , x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{7}{4}\}$

i) $f(x) = e^{8x-5} \;\; , x \in \mathbb{R}$

j) $f(x) = 5x\, e^{4-x^2} \;\; , x \in \mathbb{R}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} \;\; , x \in \mathbb{R}$

l) $f(x) = 5^x \;\; , x \in \mathbb{R}$

m) $f(x) = 7x\, 2^x \;\; , x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6.4

Bilden Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{x} - 4x^3 + a^2 \;\; , x \in \mathbb{R}_0^+$$
$$g(x) = \frac{5x-6}{8x-3} \;\; , x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{3}{8}\}$$
$$h(x) = 12x - 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{4} - 3\right)^3} \;\; , x \in [12; \infty)$$

Aufgabe 6.5

Gegeben sei die Produktionsfunktion $x(r) = \sqrt[3]{16r^2}$, wobei r die Einsatzmenge eines bestimmten Produktionsfaktors und x die ausgebrachte Menge darstellt. Der Preis für eine Einheit des Faktors betrage 12 Geldeinheiten (GE), die Fixkosten der Produktion belaufen sich auf 100 GE.

a) Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$. Diese beschreibt die Abhängigkeit der gesamten Kosten K einer Periode von der in dieser Periode produzierten Menge der Güter.

b) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion. Diese ist die erste Ableitung der Kostenfunktion und gibt näherungsweise die Kosten einer zusätzlich produzierten Einheit in Abhängigkeit von einer gegebenen Produktionsmenge an. Interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle $x = 16$. (Lösung: $K'(x) = 4{,}5\sqrt{x}$ und $K'(16) = 18$)

Lösung zu Aufgabe 6.1:
Die Funktion f ist an der Stelle $x = 2$ nicht stetig; da:

1. rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x\downarrow 2} f(x) = 9$
2. linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x\uparrow 2} f(x) = 7$
3. Funktionswert $f(2) = 9$

d.h. der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $x = 2$ sind unterschiedlich und können somit auch nicht mit dem Funktionswert an der Stelle $x = 2$ übereinstimmen.

Lösung von Aufgabe 6.2
Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ ist stetig, weil in jedem Punkt x_0 des Definitionsbereichs der Funktionswert $f(x_0)$ sowohl mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\frac{1}{(x_0-3)^2}$ als auch mit dem linksseitigen Grenzwert $\frac{1}{(x_0-3)^2}$ übereinstimmt.

Lösung von Aufgabe 6.3

a) $f'(x) = 84 \cdot x^{11}$

b) $f'(x) = (x^{-3})' = (-3) \cdot x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

c) Kettenregel: $i(x) = x - 5 \Rightarrow i'(x) = 1$ und $a(y) = y^{0,5} \Rightarrow a'(y) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-5}}$$

d) $f'(x) = 60 \cdot (3x - 4)^{19}$

e) Kettenregel: $i(x) = 4x + 5 \Rightarrow i'(x) = 4$ und $a(y) = \ln(y) \Rightarrow a'(y) = \dfrac{1}{y}$

$$f'(x) = \frac{4}{4x+5}$$

f) Faktor- und Summenregel: $f'(x) = \dfrac{5}{x}$

g) Produktregel: $f(x) = \boxed{x^7} \cdot \boxed{e^x}$

$$f'(x) = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = x^6 \cdot e^x[7 + x]$$

h) $f(x) = (7 - 4x)^{-2}$
Kettenregel: $i(x) = 7 - 4x \Rightarrow i'(x) = -4$ und $a(y) = y^{-2} \Rightarrow a'(y) = (-2) \cdot y^{-3}$

$$f'(x) = \frac{(-2) \cdot (-4)}{(7-4x)^3} = \frac{8}{(7-4x)^3}$$

i) $f'(x) = 8 \cdot e^{8x-5}$

j) Produktregel $f(x) = \boxed{5x} \cdot \boxed{e^{4-x^2}}$
Kettenregel für $\left(e^{4-x^2}\right)' = ?$
$i(x) = 4 - x^2 \Rightarrow i'(x) = -2x$ und $a(y) = e^y \Rightarrow a'(y) = e^y$
$\left(e^{4-x^2}\right)' = e^{4-x^2} \cdot (-2x)$
$f'(x) = 5e^{4-x^2} + 5x \cdot e^{4-x^2} \cdot (-2x) = 5e^{4-x^2} - 10x^2 \cdot e^{4-x^2} = 5e^{4-x^2} \cdot [1 - 2x^2]$

k) $f(x) = (x^2 + 2)^{-0{,}5}$
Kettenregel: $i(x) = x^2 + 2 \Rightarrow i'(x) = 2x$ und $a(y) = y^{-0{,}5} \Rightarrow a'(y) = (-0{,}5) \cdot y^{-1{,}5}$
$f'(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+2)^{1{,}5}} \cdot 2x = -\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$

l) $f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x$

m) $f'(x) = 7 \cdot 2^x + 7x \cdot \ln(2) \cdot 2^x = 7 \cdot 2^x[1 + x \cdot \ln(2)]$

Lösung von Aufgabe 6.4

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 12x^2$$

$$g'(x) = \frac{33}{(8x-3)^2}$$

$$h'(x) = 12 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{4} - 3}$$

Die Ableitung von $h(x)$ ergibt sich über die Kettenregel aus folgender Überlegung:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{x}{4} - 3\right)^3}\right)' = \left(\left(\frac{x}{4} - 3\right)^{1{,}5}\right)' = 1{,}5 \cdot \left(\frac{x}{4} - 3\right)^{0{,}5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}375 \cdot \left(\frac{x}{4} - 3\right)^{0{,}5} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{x}{4} - 3}$$

Lösung von Aufgabe 6.5

a) Kosten $K(x) = 100 + 12 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot x^{1{,}5} = 100 + 3 \cdot \sqrt{x^3}$

b) Grenzkosten $K'(x) = 4{,}5 \cdot \sqrt{x}$
$K'(16) = 18$ GE

Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik

Ableitungen aus den alten Klausuren (Stand: 29.04.2013)

Aufgaben

Leiten Sie die nachfolgenden Funktionen einmal ab:

31.01.2013	$x(p) = 480 - 8p \;\; ; p \in [0; 60]$
01.10.2012	$G(x) = -0{,}1x^2 + 400x - 10\,000 \;\; ; x \in [0; 4\,100]$
05.07.2012	$f(x) = \dfrac{x^5 - 12x^4 + x^3 + 3x^2}{x^2} \;\; ; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
08.02.2012	$x(p) = 120 - 6p \;\; ; p \in [0; 20]$
05.10.2011	$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 7x^2 \;\; ; x \in \mathbb{R}$
08.07.2011	$K(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 5\,000 \;\; ; x \in \mathbb{R}^+$
02.02.2011	$f(x) = (x-7)^3 \;\; ; x \in \mathbb{R}$
02.02.2011	$f(y) = \dfrac{1}{2} - y + \dfrac{y^2}{2} - 2\ln(y) \;\; ; y > 0$
27.09.2010	$K(x) = 2x^3 - 24x^2 + 200x + 100 \;\; ; x \geq 0$
27.09.2010	$G(x) = -20x + 320\sqrt{x} - 100 \;\; x \in (0; 100]$
06.07.2010	$G(x) = -8x^2 + 152x - 710 \;\; ; x \in [3{,}5; 12]$
09.02.2010	$K(x) = e^x \cdot 5x \;\; ; x \geq 0$
09.02.2010	$f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 5x^2 \;\; ; x > 0$
09.02.2010	$h(x) = \dfrac{x}{\ln x} \;\; ; x > 0$
30.09.2009	$K(x) = x^3 - 30x^2 + 527x \;\; ; x \geq 0$
30.09.2009	$k(x) = x^2 - 30x + 527 \;\; ; x > 0$
17.07.2009	$x(p) = 120 - 5p \;\; ; p \in [0; 24]$
09.02.2009	$f(x) = 50x - \dfrac{20}{x}; \;\; x \in (0; \infty]$
09.02.2009	$g(x) = \ln(x^3 \cdot e^x); \;\; x \in (0; \infty]$
09.02.2009	$G(x) = -10x^2 + 72x - 72 - 10x = -10x^2 + 62x - 72; \;\; x \in [0; 40]$
15.07.2008	$f(x) = (x^3+1) \cdot e^x; \;\; x \in \mathbb{R}$

15.07.2008	$x(p) = 18 - 2p;\ \ p \in [0;9]$
15.07.2008	$K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}03x^2 + 3x + 308;\ \ x > 0$
28.01.2008	$k_v(x) = 3x^2 - 30x + 450\ \ ; x \in [0;20]$
28.01.2008	$k(x) = 3x^2 - 30x + 450 + \dfrac{1\,152}{x}\ \ ; x \in (0;20]$
28.01.2008	$k'(x) = 6x - 30 - \dfrac{1\,152}{x^2}\ \ ; x \in (0;20]$
06.02.2007	$U(x_3) = -2x_3^2 + 35x_3 + 300\ \ ; x_3 \in [0;15]$
11.07.2006	$G(r_1) = -10r_1 - \dfrac{500}{r_1} + 200\ \ ; r_1 > 0$
19.04.2006	$G(x) = -5x^2 + 25x - 20;\ \ x \in [0;10]$
02.02.2006	$x(p) = 500 - 4p;\ \ p \in [0;125]$
30.03.2005	$f(x) = x^3 + \sqrt[4]{x};\ \ x > 0$
30.03.2005	$h(x) = x \cdot e^x;\ \ x \in \mathbb{R}$
11.02.2005	$f(x) = \dfrac{1}{2x} + \sqrt{x};\ \ x > 0$
11.02.2005	$g(x) = x \cdot \ln(x^2+1);\ \ x \in \mathbb{R}$
05.10.2004	$G(x) = -6x^2 + 36x - 30;\ \ x \in [0;20]$
05.10.2004	$K(x) = 5{,}5x^2 - 26x + 30;\ \ x \in [0;20]$
14.07.2004	$f(x) = 2x \cdot \ln(x);\ \ x > 0$
14.07.2004	$K(x) = 4x^2 + 16;\ \ x \in [0;40]$
14.07.2004	$G(x) = -8x^2 + 160x - 16;\ \ x \in [0;40]$
14.07.2004	$x(p) = 40 - 0{,}25p;\ \ p \in [0;160]$
16.04.2004	$G(x) = -4x^2 + 70x - 70;\ \ x \in [0;20]$
04.02.2004	$G(x) = x^3 - 30x^2 + 184x - 56;\ \ x \in [0;9]$
04.02.2004	$k(x) = 2x + 12 + \dfrac{56}{x};\ \ x \in (0;9]$
29.09.2003	$f(x) = 3x^4 + 7x^3 - 3x^2 + \ln(x) + 10;\ \ x > 0$
29.09.2003	$h(x) = e^x \cdot \sqrt{x};\ \ x > 0$
14.07.2003	$f(x) = 2x^2 + 2x - \ln(x);\ \ x > 0$
14.07.2003	$h(x) = \ln(x) \cdot (x^2+1);\ \ x > 0$

Lösungen

31.01.2013	$x'(p) = -8 \ \ ; p \in [0; 60]$
01.10.2012	$G'(x) = -0{,}2x + 400 \ \ ; x \in [0; 4\,100]$
05.07.2012	$f'(x) = 3x^2 - 24x + 1 \ \ ; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
08.02.2012	$x'(p) = -6 \ \ ; p \in [0; 20]$
05.10.2011	$f'(x) = x^2 - 14x$
08.07.2011	$K'(x) = 3x^2 - 60x + 300$
02.02.2011	$f'(x) = 3(x-7)^2$
02.02.2011	$f'(y) = -1 + y - \dfrac{2}{y}$
27.09.2010	$K'(x) = 6x^2 - 48x + 200$
27.09.2010	$G'(x) = -20 + \dfrac{160}{\sqrt{x}}$
06.07.2010	$G'(x) = -16x + 152$
09.02.2010	$K'(x) = 5e^x(x+1)$
09.02.2010	$f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{1/3} + 10x$
09.02.2010	$h'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
30.09.2009	$K'(x) = 3x^2 - 60x + 527$
30.09.2009	$k'(x) = 2x - 30$
17.07.2009	$x'(p) = -5$
09.02.2009	$f'(x) = 50 + \dfrac{20}{x^2}$ und $f''(x) = -\dfrac{40}{x^3}$
09.02.2009	$g(x) = \ln(x^3 \cdot e^x) = \ln(x^3) + \ln(e^x) = 3 \cdot \ln(x) + x \underbrace{\ln(e)}_{=1} = 3\ln(x) + x$ $g'(x) = \dfrac{3}{x} + 1$ und $g''(x) = -\dfrac{3}{x^2}$
09.02.2009	$G'(x) = -20x + 62$
15.07.2008	$f'(x) = (x^3 + 3x^2 + 1) \cdot e^x; \ \ x \in \mathbb{R}$
15.07.2008	$x'(p) = -2; \ \ p \in [0; 9]$

15.07.2008	$K'(x) = 0{,}06x^2 - 0{,}06x + 3;\ \ x > 0$
28.01.2008	$k'_v(x) = 6x - 30$
28.01.2008	$k'(x) = 6x - 30 - \dfrac{1\,152}{x^2}$
28.01.2008	$k''(x) = 6 + \dfrac{2\,304}{x^3}$
06.02.2007	$U'(x_3) = -4x_3 + 35$
11.07.2006	$G'(r_1) = -10 + \dfrac{500}{r_1^2}$
19.04.2006	$G'(x) = -10x + 25$
02.02.2006	$x'(p) = -4$
30.03.2005	$f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}};\ \ x > 0$
30.03.2005	$h'(x) = e^x + xe^x;\ \ x \in \mathbb{R}$
11.02.2005	$f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}};\ \ x > 0$
11.02.2005	$g'(x) = ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1};\ \ x \in \mathbb{R}$
05.10.2004	$G'(x) = -12x + 36;\ \ x \in [0; 20]$
05.10.2004	$K'(x) = 11x - 26;\ \ x \in [0; 20]$
14.07.2004	$f'(x) = 2\ln(x) + 2;\ \ x > 0$
14.07.2004	$K'(x) = 8x;\ \ x \in [0; 40]$
14.07.2004	$G'(x) = -16x + 160;\ \ x \in [0; 40]$
14.07.2004	$x'(p) = -0{,}25;\ \ p \in [0; 160]$
16.04.2004	$G'(x) = -8x + 70;\ \ x \in [0; 20]$
04.02.2004	$G'(x) = 3x^2 - 60x + 184;\ \ x \in [0; 9]$
04.02.2004	$k'(x) = 2 - \dfrac{56}{x^2};\ \ x \in (0; 9]$
29.09.2003	$f'(x) = 12x^3 + 21x^2 - 6x + \dfrac{1}{x};\ \ x > 0$
29.09.2003	$h'(x) = e^x\sqrt{x} + \dfrac{e^x}{2\sqrt{x}};\ \ x > 0$

14.07.2003 $f'(x) = 4x + 2 - \frac{1}{x}; \;\; x > 0$

14.07.2003 $h'(x) = x + \frac{1}{x} + 2x\ln(x); \;\; x > 0$