Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen QM 1 (Wirtschaftsmathematik)

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Aufgabe 9.1
Gegeben sei die Produktionsfunktion einer Einproduktunternehmung mit

$$x(r_1, r_2, r_3) = \sqrt{r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 + r_3(r_1 + r_2)}.$$

Um wie viel wächst die Produktionsmenge $x(r_1, r_2, r_3)$, wenn alle drei Produktionsfaktoren auf das 5-fache gesteigert werden?

Aufgabe 9.2
Bilden Sie die alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x, y, z) = 4x^2 - 2xy + 5y + (z - x)^3$$
$$g(x_1, x_2) = 4x_1^3 x_2^2 - x_1^4 x_2^3$$
$$h(x, y) = 2e^{0,4x-2y}$$
$$k(x, y) = 2x^3 - ln\frac{y}{x}$$

Aufgabe 9.3
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x_1^2 e^{2x_2} + x_2 ln(x_3).$$

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f an der Stelle $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.4
Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$x(r_1, r_2, r_3) = 5\, r_1^{\frac{1}{4}}\, r_2^{\frac{1}{2}}\, r_3^{\frac{1}{4}}$$

wobei r_i die Einsatzmengen des $i-$ten Produktionsfaktors bezeichnen. Die Preise pro ME der Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 3, q_2 = 6, q_3 = 3$ Geldeinheiten.

a) Berechnen Sie für die Faktoreinsatzmengen $(r_1, r_2, r_3) = (1, 100, 1)$ bzw. $(10\,000, 1, 1)$ bzw. $(10, 10, 10)$ die ausgebrachte Menge x.

b) Bestimmen Sie die Produktionskostenfunktion in Abhängigkeit von r_1, r_2, r_3.

c) Berechnen Sie die Produktionskosten für die Faktoreinsatzmengen aus a).

Aufgabe 9.5
Gegeben ist die Kostenfunktion:

$$K(x; y) = 20x + 10y + 2xy + 100 \;\; ; x, y \geq 0$$

Berechnen und interpretieren Sie die partiellen Elastizitäten an der Stelle $(x; y) = (5; 6)$.

Lösung zu Aufgabe 9.1

$$\begin{aligned}
x(5r_1,5r_2,5r_3) &= \sqrt{(5r_1)^2+4(5r_2)^2+5(5r_3)^2+5r_3(5r_1+5r_2)} \\
&= \sqrt{25r_1^2+100r_2^2+125r_3^2+25r_3(r_1+r_2)} \\
&= \sqrt{25}\cdot\sqrt{r_1^2+4r_2^2+5r_3^2+r_3(r_1+r_2)} \\
&= 5\cdot x(r_1,r_2,r_3)
\end{aligned}$$

d.h. wird die Faktoreinsatzmenge verfünffacht, so verfünffacht sich auch die Ausbringungsmenge.
Zahlenbeispiel:
$x(2,1,1)=4$ und bei 5-fachem Input: $x(10,5,5)=20=5\cdot 4$

Lösung zu Aufgabe 9.2

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 8x-2y-3(z-x)^2 \\
f_y(x,y,z) &= -2x+5 \\
f_z(x,y,z) &= 3(z-x)^2 \\
f_{xx}(x,y,z) &= 8+6(z-x) \\
f_{yy}(x,y,z) &= 0 \\
f_{zz}(x,y,z) &= 6(z-x) \\
f_{xy}(x,y,z) &= -2 \\
f_{xz}(x,y,z) &= -6(z-x) \\
f_{yz}(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{x_1}(x_1,x_2) &= 12x_1^2x_2^2-4x_1^3x_2^3 \\
g_{x_2}(x_1,x_2) &= 8x_1^3x_2-3x_1^4x_2^2 \\
g_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= 24x_1x_2^2-12x_1^2x_2^3 \\
g_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= 8x_1^3-6x_1^4x_2 \\
g_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= 24x_1^2x_2-12x_1^3x_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_x(x,y) &= 0{,}8e^{0{,}4x-2y} \\
h_y(x,y) &= -4e^{0{,}4x-2y} \\
h_{xx}(x,y) &= 0{,}32e^{0{,}4x-2y} \\
h_{yy}(x,y) &= 8e^{0{,}4x-2y} \\
h_{xy}(x,y) &= -1{,}6e^{0{,}4x-2y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(x,y) &= 2x^3-\ln\left(\frac{y}{x}\right)=2x^3-\ln(y)+\ln(x) \\
k_x(x,y) &= 6x^2+\frac{1}{x} \\
k_y(x,y) &= -\frac{1}{y} \\
k_{xx}(x,y) &= 12x-\frac{1}{x^2} \\
k_{yy}(x,y) &= \frac{1}{y^2} \\
k_{xy}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9.3

$$
\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1e^{2x_2}\\
f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2e^{2x_2}+\ln(x_3)\\
f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) &= \frac{x_2}{x_3}\\
f_{x_1}(-1,0,1) &= -2\\
f_{x_2}(-1,0,1) &= 2\\
f_{x_3}(-1,0,1) &= 0
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 9.4

a)
$$
\begin{aligned}
x(1,100,1) &= 5\cdot 1\cdot 10\cdot 1 = 50\\
x(10\,000,1,1) &= 5\cdot\sqrt[4]{10\,000}\cdot 1\cdot 1 = 50\\
x(10,10,10) &= 5\cdot\sqrt[4]{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{10} = 5\cdot 10^{1/4}\cdot 10^{1/2}\cdot 10^{1/4} = 5\cdot 10 = 50
\end{aligned}
$$
d.h. die Ausbringungsmenge beträgt für alle drei Kombinationen jeweils 50 ME- (Isoquanten=Kurven gleichen Ertrags)

b) Kosten
$K(r_1,r_2,r_3) = 3r_1 + 6r_2 + 3r_3$

c)

r	$\begin{pmatrix}1\\100\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\,000\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$
$K(r)$	606	30 009	120

d.h. insb. sind die Kosten bei gleichen Erträgen für die Kombination (10,10,10) am kleinsten.

Lösung zu Aufgabe 9.5

$K_x(x;y) = 20 + 2y$ und $K_y(x;y) = 10 + 2x$

$\varepsilon_x(x;y) = (20+2y)\cdot\dfrac{x}{K(x;y)}$

$\varepsilon_x(5;6) = 32\cdot\dfrac{5}{320} = 0{,}5$

d.h. werden statt $x = 5$ ME von Gut I und $y = 6$ ME von Gut II jetzt $x = 5{,}05$ ME von Gut I und $y = 6$ ME von Gut II hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 0,5 %.

$\varepsilon_y(x;y) = (10+2x)\cdot\dfrac{y}{K(x;y)}$

$\varepsilon_y(5;6) = 20\cdot\dfrac{6}{320} = 0{,}375$

d.h. werden statt $x = 5$ ME von Gut I und $y = 6$ ME von Gut II jetzt $x = 5$ ME von Gut I und $y = 6{,}06$ ME von Gut II hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 0,375 %.

Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen QM 1 (Wirtschaftsmathematik)

Partielle Ableitungen in Klausuren
Stand: 11.05.2015

04.02.2015 $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 6y - 3 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$

04.02.2015 $L(x,y,\lambda) = 100 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + \lambda(x + y - 10)$

29.09.2014 $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^3 - 27z + 2x - 2ay + 100 \;\; ; x, y, z \in \mathbb{R}$

03.07.2014 $G(x,y) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 \;\; ; x, y \geq 0$

07.02.2014 $L(x,y,\lambda) = 8x + 24y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 22) \;\; ; x \neq 0, y \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\{0\}$

26.09.2013 $L(x,y,\lambda) = 3\ln(x) + 15\ln(y) + \lambda(x + y - 120) \;\; ; x, y \in (0;\infty), \lambda \in \mathbb{R}$

03.07.2013 $U(x,y) = 300x - x^2 - xy + 900y - 4y^2 \;\; ; x, y \in [0;150]$

03.07.2013 $r(x,y) = \sqrt{x} + y^2 \;\; ; x, y \in (0;\infty)$

31.01.2013 $L(x,y,\lambda) = x^3 + 2y^2 - xy + 100 + \lambda(x + y - 9)$

01.10.2012 $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - a \cdot x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \;\; ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

05.07.2012 $G(x_1,x_2) = -x_1^2 - a \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 1 \;\; ; x_1, x_2 \geq 0$

08.02.2012 $f(x,y) = -6x^2 + 6y^2 + 136x - 20xy + 100 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$

08.02.2012 $L(x;y;\lambda) = 4x + y - 10 + \lambda(2x^2 + y^2 - 36) \;\; ; x, y > 0$

05.10.2011 $f(x,y) = e^x + \ln(y^2 + 1) + 2x^2y \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$

05.10.2011 $L(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 7x + 9y - 10 + \lambda(x + y - 10) \;\; ; x, y, \in [0;10]$

08.07.2011 $f(x,y) = y^2 - x^2 - 2y \;\; ; x, y, \in \mathbb{R}$

08.07.2011 $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + xy + x + y + 100 + \lambda(x + y - 10) \;\; ; x, y, \in \mathbb{R}$

02.02.2011 $K(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + xy + 100 \;\; ; x, y \geq 0$

02.02.2011 $L(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(y) + \lambda(x + y - 1) \;\; ; x < -5, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$

27.09.2010 $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4y + \frac{1}{3}y^3 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$

06.07.2010 $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}x^2+8y^2-24x-32y+400+\lambda(3x-12y)\ ;x,y\geq 0$

09.02.2010 $G(x,y)=-2x^3-y^2+12xy-700\ ;x,y,\geq 7$

09.02.2010 $L(x,y,\lambda)=-0{,}25x^2-4y^2+12x+16y-10+\lambda(2x-8y)\ \ x,y\geq 0$

30.09.2009 $L(x,y,\lambda)=20x+39y-2x^2-3y^2+\lambda(4x+6y-24)\ ;x_1,x_2\in\mathbb{R}_0^+$

17.07.2009 $f(x,y)=x^3+y^2-12xy+23\ ;x,y\in\mathbb{R}$

17.07.2009 $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2-8x_2+210+\lambda(x_1+x_2-100)\ ;x_1,x_2\in\mathbb{R}_0^+$

09.02.2009 $G(x,y)=12x+54y-x^2-4y^2+xy-100\ ;x,y\in[0;50]$

15.07.2008 $G(x_1;x_2)=-x_1^3-12x_1^2-x_2^2-4x_1x_2+90x_1+30x_2-10\ ;x_1,x_2\geq 0$

28.01.2008 $G(x;y)=-2x^2-y^2+50x+15y-xy-50\ ;x\in[0;15],y\in[0;20]$

28.01.2008 $L(x,y,\lambda)=-2x^2-y^2+50x+15y-xy-50+\lambda(2x-y)$

10.07.2007 $L(x_1,x_2,\lambda)=\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2}+\lambda(0{,}5x_1+4x_2-96)\ ;x_1,x_2>0$

06.02.2007 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-4)$

11.07.2006 $f(x;y)=x^3-12x-y^2+2y-10\ ;x,y\in\mathbb{R}$

19.04.2006 $f(x,y)=3x^2-4y^2+5xy-14{,}6x$

02.02.2006 $f(x,y)=xy^4+\ln(x^2+1)+\frac{x}{y}$

02.02.2006 $L(x,y,\lambda)=(x-3)^2+(y-4)^2+\lambda(x^2+y^2-625)$

12.07.2005 $L(x,y,\lambda)=10x+22y+527+\lambda(x^2+y^2-146)$

30.03.2005 $G(x,y)=120x-x^2+70y-0{,}5y^2-100$

Lösungen:

04.02.2015
$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) &=& 2x+2y \\ f_y(x,y) &=& -2y+2x-6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_{xx}(x,y) &=& 2 \\ f_{yy}(x,y) &=& -2 \\ f_{xy}(x,y) &=& 2 \end{array}$$

04.02.2015
$$\begin{array}{ll} L_x(x,y,\lambda) = -2x+y+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) = -2 \\ L_y(x,y,\lambda) = -y+x+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) = -1 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-10 & L_{xy}(x,y,\lambda) = 1 \end{array}$$

29.09.2014
$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y,z) &=& 2x+2y+2 \\ f_y(x,y,z) &=& 2x+4y-2a \\ f_z(x,y,z) &=& 3z^2-27 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f_{xx}(x,y,z) &=& 2 \\ f_{yy}(x,y,z) &=& 4 \\ f_{zz}(x,y,z) &=& 6z \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f_{xy}(x,y,z) &=& 2 \\ f_{xz}(x,y,z) &=& 0 \\ f_{yz}(x,y,z) &=& 0 \end{array}$$

03.07.2014
$$\begin{array}{ll} G_x(x,y) = -4x-4y+16 & G_{xx}(x,y) = -4 \\ G_y(x,y) = -4x-8y+28 & G_{yy}(x,y) = -8 \\ & G_{xy}(x,y) = -4 \end{array}$$

07.02.2014
$$\begin{array}{ll} L_x(x,y,\lambda) = 8+2\lambda x & L_{xx}(x,y,\lambda) = 2\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) = 24+4\lambda y & L_{yy}(x,y,\lambda) = 4\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+2y^2-22 & L_{xy}(x,y,\lambda) = 0 \end{array}$$

26.09.2013
$$\begin{array}{ll} L_x(x,y,\lambda) = \frac{3}{x}+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) = -\frac{3}{x^2} \\ L_y(x,y,\lambda) = \frac{15}{y}+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) = -\frac{15}{y^2} \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-120 & L_{xy}(x,y,\lambda) = 0 \end{array}$$

03.07.2013
$$\begin{array}{ll} U_x(x,y) = 300-2x-y & U_{xx} = -2 \\ U_y(x,y) = -x+900-8y & U_{yy} = -8 \\ & U_{xy}(x,y) = -1 \end{array}$$

03.07.2013
$$r_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad r_y(x,y) = 2y$$

31.01.2013
$$\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) &=& 3x^2-y+\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &=& 4y-x+\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x+y-9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 6x \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 4 \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& -1 \end{array}$$

01.10.2012
$$\begin{array}{rcl} f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) &=& -2x_1-x_2 \\ f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) &=& -2x_2-x_1+x_3 \\ f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) &=& -2ax_3+x_2 \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} f_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3) &=& -2 \\ f_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3) &=& -2 \\ f_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3) &=& -2a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3) &=& -1 \\ f_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3) &=& 0 \\ f_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3) &=& 1 \end{array}$$

05.07.2012 $\begin{array}{rcl} G_{x_1}(x_1,x_2) &=& -2x_1 - x_2 + 2 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) &=& -2ax_2 - x_1 + 3 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} G_{x_1x_1}(x_1,x_2) &=& -2 \\ G_{x_2x_2}(x_1,x_2) &=& -2a \\ G_{x_1x_2}(x_1,x_2) &=& -1 \end{array}$

08.02.2012 $\begin{array}{l} f_x(x,y) = -12x + 136 - 20y \\ f_y(x,y) = 12y - 20x \end{array}$ $\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = -12 \\ f_{yy} = 12 \\ f_{xy} = -20 \end{array}$

08.02.2012 $\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) &=& 4 + 4\lambda x \\ L_y(x,y,\lambda) &=& 1 + 2\lambda y \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& 2x^2 + y^2 - 36 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 4\lambda \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 2\lambda \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 0 \end{array}$

05.10.2011 $\begin{array}{l} f_x(x,y) = e^x + 4xy \\ f_y(x,y) = \dfrac{2y}{y^2+1} + 2x^2 \end{array}$ $\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = e^x + 4y \\ f_{yy} = 2 \cdot \dfrac{1-y^2}{(y^2+1)^2} \\ f_{xy} = 4x \end{array}$

05.10.2011 $\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) &=& -2x + 7 + \lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &=& -2y + 9 + \lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x + y - 10 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& -2 \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& -2 \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 0 \end{array}$

08.07.2011 $\begin{array}{l} f_x(x,y) = -2x \\ f_y(x,y) = 2y - 2 \end{array}$ $\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = -2 \\ f_{yy}(x,y) = 2 \\ f_{xy}(x,y) = 0 \end{array}$

08.07.2011 $\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) &=& 2x + y + 1 + \lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &=& 2y + x + 1 + \lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x + y - 10 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 2 \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 2 \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 1 \end{array}$

02.02.2011 $K_x(x,y) = 6x + y$ und $K_y(x,y) = 4y + x$

02.02.2011 $\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) &=& x + \lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &=& -\dfrac{2}{y} + \lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x + y - 1 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 1 \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& \dfrac{2}{y^2} \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 0 \end{array}$

27.09.2010 $\begin{array}{l} f_x(x,y) = x^2 + 4x \\ f_y(x,y) = -4 + y^2 \end{array}$ $\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 2x + 4 \\ f_{yy}(x,y) = 2y \\ f_{xy}(x,y) = 0 \end{array}$

06.07.2010 $\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) &=& x - 24 + 3\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &=& 16y - 32 - 12\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &=& 3x - 12y \end{array}$ $\begin{array}{rcl} L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 1 \\ L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 16 \\ L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 0 \end{array}$

09.02.2010 $G_x(x,y) = -6x^2 + 12y$ und $G_y(x,y) = -2y + 12x$

09.02.2010 $L_x(x,y,\lambda) = -0{,}5x + 12 + 2\lambda$ und $L_y(x,y,\lambda) = -8y + 16 - 8\lambda$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = 2x - 8y$

30.09.2009 $L_x(x,y,\lambda) = 20 - 4x + 4\lambda$ und $L_y(x,y,\lambda) = 39 - 6y + 6\lambda$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = 4x + 6y - 24$

17.07.2009 $f_x(x,y) = 3x^2 - 12y$ und $f_y(x,y) = 2y - 12x$

17.07.2009 $L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1 + \lambda$ und $L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_2 - 8 + \lambda$ und $L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = x_1 + x_2 - 100$

09.02.2009
$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= 12 - 2x + y & G_{xx}(x,y) &= -2 \\ G_y(x,y) &= 54 - 8y + x & G_{yy}(x,y) &= -8 \\ & & G_{xy}(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

15.07.2008
$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1,x_2) &= -3x_1^2 - 24x_1 - 4x_2 + 90 & G_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= -6x_1 - 24 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) &= -2x_2 - 4x_1 + 30 & G_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= -2 \\ & & G_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= -4 \end{aligned}$$

28.01.2008
$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= -4x + 50 - y & G_{xx}(x,y) &= -4 \\ G_y(x,y) &= -2y + 15 - x & G_{yy}(x,y) &= -2 \\ & & G_{xy}(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

28.01.2008
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -4x + 50 - y + 2\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= -4 \\ L_y(x,y,\lambda) &= -2y + 15 - x - \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= -2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= 2x - y & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

10.07.2007
$$\begin{aligned} L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + 0{,}5\lambda & L_{x_1x_1}(x_1,x_2,\lambda) &= -\frac{1}{4\sqrt{x_1^3}} \\ L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{x_2}} + 4\lambda & L_{x_2x_2}(x_1,x_2,\lambda) &= -\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}} \\ L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) &= 0{,}5x_1 + 4x_2 - 96 & L_{x_1x_2}(x_1,x_2,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

06.02.2007
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2y + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 4 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

11.07.2006 $f_x(x;y) = 3x^2 - 12$ und $f_y(x;y) = -2y + 2$
$f_{xx}(x;y) = 6x$ und $f_{yy}(x;y) = -2$ und $f_{xy}(x;y) = 0$

19.04.2006 $f_x(x,y) = 6x + 5y - 14{,}6$ und $f_y(x,y) = -8y + 5x$
$f_{xx}(x,y) = 6$ und $f_{yy}(x,y) = -8$ und $f_{xy}(x,y) = 5$

02.02.2006 $f_x(x,y) = y^4 + \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{y}$ und $f_y(x,y) = 4xy^3 - \dfrac{x}{y^2}$

02.02.2006 $L_x(x,y,\lambda) = 2(x-3) + 2\lambda x$ und $L_y(x,y,\lambda) = 2(y-4) + 2\lambda y$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 625$
$L_{xx}(x,y,\lambda) = 2 + 2\lambda$ und $L_{yy}(x,y,\lambda) = 2 + 2\lambda$ und $L_{xy}(x,y,\lambda) = 0$

12.07.2005 $L_x(x,y,\lambda) = 10 + 2\lambda x$ und $L_y(x,y,\lambda) = 22 + 2\lambda y$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 146$
$L_{xx}(x,y,\lambda) = 2\lambda$ und $L_{yy}(x,y,\lambda) = 2\lambda$ und $L_{xy}(x,y,\lambda) = 0$

30.03.2005 $G_x(x,y) = 120 - 2x$ und $G_y(x,y) = 70 - y$
$G_{xx}(x,y) = -2$ und $G_{yy}(x,y) = -1$ und $G_{xy}(x,y) = 0$